# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2025/26)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Dato il seguente problema di $PL$, si determini per quali valori del parametro reale $\epsilon$ la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia ottima

$$(P_\epsilon) \qquad \begin{array}{rrcrcr} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & \epsilon \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

Si determini inoltre: **1.a)** per quali valori di $\epsilon$ la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia l'unica soluzione ottima, e **1.b)** per quali valori di $\epsilon$ la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Giustificare le risposte.

**SVOLGIMENTO**

Data la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \;\; \max\{\, c^T x \,:\, Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \;\; \min\{\, y^T b \,:\, y^T A = c^T \,,\, y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

**Proposizione.** Una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per $(P)$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per $(D)$ complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di $(P_\epsilon)$ è

$$(D_\epsilon) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & \epsilon y_1 & & & + & y_3 & + & 3y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \,:\, A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{2, 3\}$ per $\epsilon \neq -2$, mentre $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$ per $\epsilon = -2$. Si osservi che, essendo le righe $A_2$ e $A_3$ linearmente indipendenti, $\bar{x}$ è una soluzione di base per ogni $\epsilon$, è ammissibile per $\epsilon \geq -2$, ed è degenere per $\epsilon = -2$.

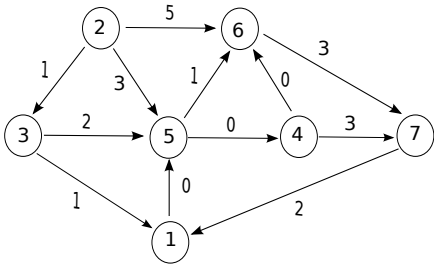
Per $\epsilon > -2$, una soluzione duale $\bar{y}$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per $(D_\epsilon)$ essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -y_2 & + & 2y_3 & = & 3 \\ y_2 & - & y_3 & = & -1 \\ y_2 & , & y_3 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

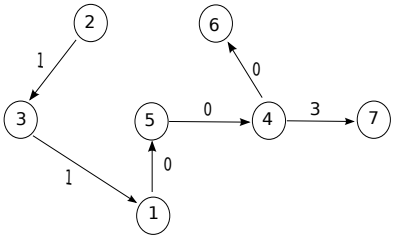
Tale sistema ammette come unica soluzione $[\bar{y}_2, \bar{y}_3] = [1, 2]$. Pertanto, per $\epsilon > -2$, $\bar{x}$ è soluzione ottima di $(P_\epsilon)$. Poiché $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è ammissibile per $(D_\epsilon)$ indipendentemente dal valore del parametro $\epsilon$, e rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$ anche per $\epsilon = -2$, segue che $\bar{x}$ è soluzione ottima di $(P_\epsilon)$ anche per $\epsilon = -2$. Pertanto, $\bar{x}$ è soluzione ottima di $(P_\epsilon)$ per ogni $\epsilon \geq -2$.

Per discuterne l'unicità, osserviamo che $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è una soluzione di base ottima non degenere per $(D_\epsilon)$ per ogni $\epsilon \geq -2$. Possiamo quindi concludere che $\bar{x}$ è l'unica soluzione ottima di $(P_\epsilon)$ per ogni $\epsilon \geq -2$.

**2)** Si consideri il problema di individuare un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura. Si eseguano le prime cinque iterazioni (inclusa l'inizializzazione) dell'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si specifichi il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$.




Si consideri quindi l'albero sotto riportato: $(i)$ si dimostri che è un albero dei cammini minimi di radice 2 per l'istanza considerata; $(ii)$ nel caso in cui il costo dell'arco $(4, 6)$ sia un parametro reale $\epsilon$ (anzichè valere 0, come in figura), si specifichi per quali valori di $\epsilon$ tale albero è un albero dei cammini minimi di radice 2. Giustificare tutte le risposte.




**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene il ciclo $(1, 5, 6, 7)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità $Q$ sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

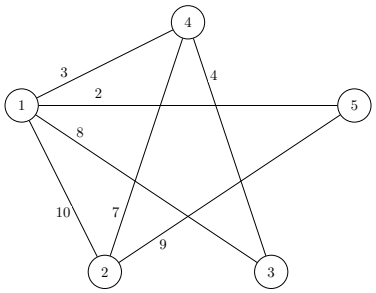
| it. | $u$ | $p[1]$ | $p[2]$ | $p[3]$ | $p[4]$ | $p[5]$ | $p[6]$ | $p[7]$ | $d[1]$ | $d[2]$ | $d[3]$ | $d[4]$ | $d[5]$ | $d[6]$ | $d[7]$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 2 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 31 | 0 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | $\{2\}$ |
| 1 | 2 | 2 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 31 | 0 | 1 | 31 | 3 | 5 | 31 | $\{5, 3, 6\}$ |
| 2 | 3 | 3 | *nil* | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 31 | 3 | 5 | 31 | $\{1, 5, 6\}$ |
| 3 | 1 | 3 | *nil* | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 31 | 2 | 5 | 31 | $\{5, 6\}$ |
| 4 | 5 | 3 | *nil* | 2 | 5 | 1 | 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 31 | $\{4, 6\}$ |

$(i)$ Le etichette associate ai nodi dell'albero valgono: $d(1) = 2$, $d(2) = 0$, $d(3) = 1$, $d(4) = 2$, $d(5) = 2$, $d(6) = 2$, $d(7) = 5$. Poiché gli archi non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman, si tratta di un albero dei cammini minimi di radice 2. $(ii)$ Se il costo dell'arco $(4, 6)$ è un parametro reale $\epsilon$, l'etichetta del nodo 6 vale $d(6) = 2 + \epsilon$. L'albero in figura è un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di $\epsilon$ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di Bellman. Per effettuare tale verifica, è sufficiente considerare gli archi non appartenenti all'albero che sono incidenti il nodo 6, ovvero (2,6), (5,6) e (6,7):

1. (2,6): $d(2) + 5 \geq d(6)$, ovvero $5 \geq 2 + \epsilon$, ovvero $\epsilon \leq 3$;
2. (5,6): $d(5) + 1 \geq d(6)$, ovvero $3 \geq 2 + \epsilon$, ovvero $\epsilon \leq 1$;
3. (6,7): $d(6) + 3 \geq d(7)$, ovvero $5 + \epsilon \geq 5$, ovvero $\epsilon \geq 0$.

Segue che l'albero in figura è un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se $0 \leq \epsilon \leq 1$.

**3)** Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando MS1T (ovvero, determinando un 1-albero di copertura di costo minimo) come rilassamento e nessuna euristica. Per eseguire il branching, si selezioni un nodo con 3 archi incidenti nell'1-albero di copertura di costo minimo determinato (a parità di tale valore, quello con indice minimo), e si generino 3 figli fissando a zero la variabile corrispondente a uno di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi $Q$ come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riporti la soluzione ottenuta dal rilassamento, con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché. Al termine, si proponga una disuguaglianza valida per il problema dato. Giustificare le risposte.




**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta in ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

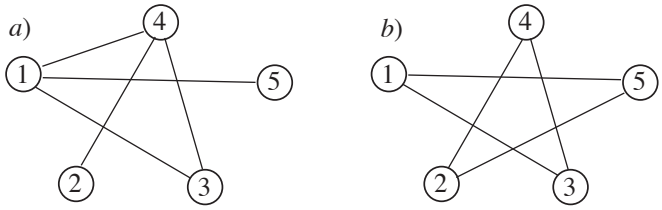
$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 24$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non è stata determinata una soluzione ammissibile. Pertanto $\underline{z} = 24 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a generare 3 figli, in cui si fissano a zero le variabili corrispondenti agli archi $(1, 3)$, $(1, 4)$ e $(1, 5)$, rispettivamente.

$\boxed{x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo arco incidente nel grafo ridotto, è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 30$, è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $30 < z = +\infty$, si pone $z = 30$. Il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{15} = 0}$ Poiché il nodo 5 ha un solo arco incidente nel grafo ridotto, è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

Poiché $Q$ è vuota, l'algoritmo termina, restituendo la soluzione ottima in (b), di valore $z = 30$.




Indicando con $G = (N, A)$, $|N| = n$, il grafo su cui è definita l'istanza del problema TSP, una possibile disuguaglianza valida è $\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = n$. Oppure, dato un qualsiasi sottoinsieme $Q$ non vuoto di $N$, $\sum_{(i,j)\in A: i\in Q, j\in N\setminus Q} x_{ij} \geq 1$.