Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Domini Funzionali-8.3

Switch Lemma

Switch Lemma

$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq)$ CPO

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$e_{0,0}$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1}$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$e_{0,0} \sqsubseteq e_{0,1} \sqsubseteq e_{0,2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq e_{0,m} \sqsubseteq \cdots$$

Switch Lemma

$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq)$ CPO

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqsupseteq & & \sqsupseteq & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & \\
\sqcup\!\mid & & \sqcup\!\mid & & \sqcup\!\mid & & & & \sqcup\!\mid & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!\mid & & \sqcup\!\mid & & \sqcup\!\mid & & & & \sqcup\!\mid & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!\mid & & \sqcup\!\mid & & \sqcup\!\mid & & & & \sqcup\!\mid & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}$$

Switch Lemma

$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq)$ CPO

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \iddots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}
$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato n l'insieme $\{e_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$

forma una catena (una riga nella figura)

che ha un lub (E e' un CPO)

$$\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \iddots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \\
\boxed{e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots} & & \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots & &
\end{array}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi(non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $\quad e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad$ se $\; n \leq n' \wedge m \leq m'$

fissato $\; n \;$ l'insieme $\; \{e_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$

forma una catena (una riga nella figura)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \iddots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \; \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \; \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{2,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \; \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{1,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots \; \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{0,m}
\end{array}$$

che ha un lub (E è un CPO)

$$\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

formiamo la catena di tutti lub delle righe

$$\left\{ \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Switch Lemma

$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq)$ CPO

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \iddots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}
$$

fissato m l'insieme $\{e_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$

forma una catena (una colonna nella figura)

che ha un lub (E e' un CPO)

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

Switch Lemma

$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq)$ CPO

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

tali che $e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}$ se $n \leq n' \wedge m \leq m'$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,0} & & \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,1} & & \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,2} & & & & \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \iddots \\
\sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & & & \sqcup\!\!| & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & & & \sqcup\!\!| & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & \\
\sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & & & \sqcup\!\!| & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & & & \sqcup\!\!| & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & \sqcup\!\!| & & & & \sqcup\!\!| & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}
$$

fissato n l'insieme $\{e_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$

forma una catena (una colonna nella figura)

e quindi ha lub (E e' un CPO)

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

formiamo la catena di tutti lub delle colonne

$$\left\{ \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

Switch Lemma

$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq)$ CPO

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{se} \quad n \leq n' \wedge m \leq m'$$

$$\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} e_{k,k}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}$$

gli elementi diagonali $\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

formano un catena

che ha lub (E è un CPO)

$$\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} e_{k,k}$$

Switch Lemma

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq) \quad \text{CPO}$$

un insieme di elementi (non una catena) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{se} \;\; n \leq n' \wedge m \leq m'$$

$$\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \iddots \\
\sqcup\!| & & \sqcup\!| & & \sqcup\!| & & & & \sqcup\!| & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!| & & \sqcup\!| & & \sqcup\!| & & & & \sqcup\!| & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots & & \vdots & & \\
\sqcup\!| & & \sqcup\!| & & \sqcup\!| & & & & \sqcup\!| & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!| & & \sqcup\!| & & \sqcup\!| & & & & \sqcup\!| & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{1,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\sqcup\!| & & \sqcup\!| & & \sqcup\!| & & & & \sqcup\!| & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{0,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}$$

proviamo che
tutti questi insiemi hanno
gli stessi u.b.
e quindi lo stesso lub

$$\left\{ \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} e_{k,k} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\left\{ \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m} \right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

$$\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

(i) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ ha gli stessi u.b. di $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

dove $e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_2 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{2,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_1 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{1,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_0 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{0,m}
\end{array}
$$

(i) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ stesso u.b. di $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

dove $e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}$

1. prendiamo un u.b. e di $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

e

prendiamo un indice di riga n

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\sqsupseteq & & \sqsupseteq & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \\
\sqsupseteq & & \sqsupseteq & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\sqsupseteq & & \sqsupseteq & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_2 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{2,m} \\
\sqsupseteq & & \sqsupseteq & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_1 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{1,m} \\
\sqsupseteq & & \sqsupseteq & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq & & & & \sqsupseteq \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_0 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{0,m}
\end{array}
$$

proviamo $e_n \sqsubseteq e$

$\{e_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

una riga la matrice

e è un u.b. di $\{e_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$

$e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}$ è un lub

percio' $e_n \sqsubseteq e$

(i)

$\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ stesso u.b. di $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

dove $\displaystyle e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}$

2. prendiamo un u.b. e di $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & & & & & & & e \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \sqsubseteq & e_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \sqsubseteq & e_2 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{2,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \sqsubseteq & e_1 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{1,m} \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \sqsubseteq & e_0 = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{0,m}
\end{array}
$$

prendiamo indici n, m

proviamo $e_{n,m} \sqsubseteq e$

$$e_{n,m} \sqsubseteq \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} = e_n \sqsubseteq e$$

un elemento della riga

il lub di quella riga

(ii)

$\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ stesso u.b. di $\left\{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$

la prova è analoga alla precedente
(ragioniamo per colonne, non per righe)

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,0} \quad \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,1} \quad \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,2} \qquad \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}$$

(iii) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ stesso u.b. di $\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

1. prendiamo un u.b. e di $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & e & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}
$$

ma questo e' immediato, perche'

$$\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$$

la diagonale l'intera matrice

(iii) $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ stesso u.b. di $\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

2. prendiamo un u.b. e di $\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

vogliamo provare che questo è un u.b. per $\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$

e

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{n,0} & \sqsubseteq & e_{n,1} & \sqsubseteq & e_{n,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{n,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{2,0} & \sqsubseteq & e_{2,1} & \sqsubseteq & e_{2,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{1,0} & \sqsubseteq & e_{1,1} & \sqsubseteq & e_{1,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} & & \\
e_{0,0} & \sqsubseteq & e_{0,1} & \sqsubseteq & e_{0,2} & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & e_{2,m} & \sqsubseteq & \cdots
\end{array}
$$

prendiamo gli indici n, m

proviamo $e_{n,m} \sqsubseteq e$

sia $k = \max\{n, m\}$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{k,k} \sqsubseteq e$$

$n \leq k \wedge m \leq k$

e è un u.b. di $\{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

Switch Lemma: recap

$$\{e_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$$

$$e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'} \quad \text{if} \quad n \le n' \wedge m \le m'$$

stesso insieme di upper bounds di

$$\left\{\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \{e_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \qquad \left\{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} e_{n,m} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} e_{k,k} = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}}\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} e_{n,m}$$

Domini funzionali

Spazio delle funzioni

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D)$$

$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E)$$

$$\mathrm{CPO}_\perp \;\Rightarrow\; [\mathcal{D} \to \mathcal{E}] = (\; [D \to E] \;,\; \sqsubseteq_{[D \to E]} \;)$$

$$D \to E \triangleq \{\; f \;\mid\; f : D \to E \;\}$$

$$[D \to E] \triangleq \{\; f \;\mid\; f : D \to E \;,\; f \text{ continuous} \;\}$$

come ordiniamo le funzioni?

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{iff} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq 0 \qquad f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(1) = 0 \not\sqsubseteq_{\mathbb{Z}_\perp} 1 = g(1)$$

le funzioni totali in $\mathbb{Z}_\perp$ non sono comparabili

(a meno che non siano uguali)

ogni funzione totale è massima in $\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad g(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp]} g$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \text{ dispari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad g(x) \triangleq \begin{cases} 0 & x \text{ pari} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp]} g$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq \begin{cases} x! & 1 \leq x \leq 10 \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad g(x) \triangleq \begin{cases} x! & 1 \leq x \leq 15 \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp]} g$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x,y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \quad g(x,y) \triangleq \begin{cases} (x * y)^2 & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp]} g$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x,y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad g(x,y) \triangleq \begin{cases} x * y & x, y \neq \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ 0 & x = \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \\ \perp_{\mathbb{Z}_\perp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp]} g$$

si (come funzioni)

ma g e' continua?

$$g(\perp, \perp) = 0 \qquad\qquad g(1,1) = 1$$

non e' neanche monotona!

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, x) \qquad f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq (x, x)$$

Esempio

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{sse} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$f, g : \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$$

$$f(x) \triangleq (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, x) \qquad f \overset{?}{\sqsubseteq}_{[\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp]} g \qquad g(x) \triangleq (x, \perp_{\mathbb{Z}_\perp})$$

$$f(0) = (\perp_{\mathbb{Z}_\perp}, 0) \not\sqsubseteq_{\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp} (0, \perp_{\mathbb{Z}_\perp}) = g(0)$$

CPO Funzionali

$$[\mathcal{D} \to \mathcal{E}] = (\ [D \to E]\ ,\ \sqsubseteq_{[D\to E]}\ )$$

e' un ordinamento parziale?

riflessività, antisimmetria, transitività di $\sqsubseteq_{[D\to E]}$
seguono immediatamente da quelli di $\sqsubseteq_E$

c'e' un elemento bottom?

sia $\perp_{[D\to E]} = \lambda d.\perp_E$

prendiamo una funzione $f \in [D \to E]$

prendiamo $d \in D$ abbiamo che $\perp_{[D\to E]} d = \perp_E \sqsubseteq_E f(d)$

CPO Funzionali (con.)

$$[\mathcal{D} \to \mathcal{E}] = (\ [D \to E]\ ,\ \sqsubseteq_{[D \to E]}\ )$$

e’ completo?

prima mostriamo che qualsiasi catena di funzioni monotone (non necessariamente continue) ha un limite in $D \to E$

poi dimostreremo che il limite in $D \to E$ di una qualsiasi catena di funzioni continue è anche continuo

CPO Funzionali (con.)

$\{f_n : D \to E\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di funzioni monotone (non necessariamente continue)

proviamo che il suo lub e' $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(d)$

cioe' $h(d) \triangleq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(d)$

Come lo dimostriamo? Dimostrando che la funzione h

1. è un limite superiore della catena
2. è minore o uguale di ogni altro upper bound

CPO Funzionali (con.)

prendiamo una catena

$\{f_n : D \to E\}_{n \in \mathbb{N}}$ (monotone ma non necessariamente continue)

1. $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$ e' un upper bound della catena

prendiamo qls $n \in \mathbb{N}$

per ogni $d \in D$ $\quad f_n(d) \sqsubseteq_E \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d) = h(d)$

percio' $\quad f_n \sqsubseteq_{D \to E} h$

CPO Funzionali (con.)

prendiamo una catena $\{f_n : D \to E\}_{n\in\mathbb{N}}$ (funzioni non necessariamente continue)

2. $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(d)$ è il minimo tra tutti gli upper bound

prendiamo g tale che $\forall n.\ f_n \sqsubseteq_{D\to E} g$

vogliamo provare $h \sqsubseteq_{D\to E} g$

prendiamo $d \in D$ $\quad \forall n.\ f_n(d) \sqsubseteq_E g(d)$

quindi $g(d)$ è un u.b. di $\{f_n(d)\}_{n\in\mathbb{N}}$

e percio' $\quad h(d) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(d) \sqsubseteq_E g(d)$

CPO Funzionali (con.)

TH. prendiamo una catena $\{f_n : D \to E\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni continue

allora $h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(d)$ è continua

prova. sia $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una catena in D

proviamo $h\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} h(d_i)$

$$h\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right)$$ per def di h

$$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_n(d_i)$$ per continuita' di f_n

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(d_i)$$ per switch lemma (applicabile?) se potessimo......

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} h(d_i)$$ per def di h

CPO Funzionali (con.)

se $n \leq m \wedge i \leq j$ allora $f_n(d_i) \sqsubseteq_E f_m(d_j)$?

$$\Downarrow$$

$$f_n \sqsubseteq_{[D \to E]} f_m \wedge d_i \sqsubseteq d_j$$

$$f_n(d_i) \sqsubseteq_E f_n(d_j) \sqsubseteq_E f_m(d_j)$$

f_n monotona $\quad f_n \sqsubseteq_{[D \to E]} f_m$

$$= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_n(d_i)$$

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d_i)$$ per switch lemma (applicabile?)

CPO Funzionali (con.)

TH. $[\mathcal{D} \to \mathcal{E}] = (\ [D \to E]\ ,\ \sqsubseteq_{[D \to E]}\ )$ e' completo

prova. prendiamo una catena $\{f_n : [D \to E]\}_{n \in \mathbb{N}}$

$h \triangleq \lambda d. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$ è un lub in $D \to E$

è continuo $h \in [D \to E]$

dal momento che $[D \to E] \subseteq D \to E$

h è il lub in $[D \to E]$

CPO Funzionali (con.)

$$[\mathcal{D} \to \mathcal{E}] = (\ [D \to E]\ ,\ \sqsubseteq_{[D \to E]}\ )$$

$$f \sqsubseteq_{[D \to E]} g \quad \text{iff} \quad \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq_E g(d)$$

$$\perp_{[D \to E]} \triangleq \lambda d.\ \perp_E$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n \triangleq \lambda d.\ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(d)$$

$$f \in [D \to E], g \in [E \to F] \quad \Rightarrow \quad g \circ f \in [D \to F]$$

la composizioni di funzioni continue è continua