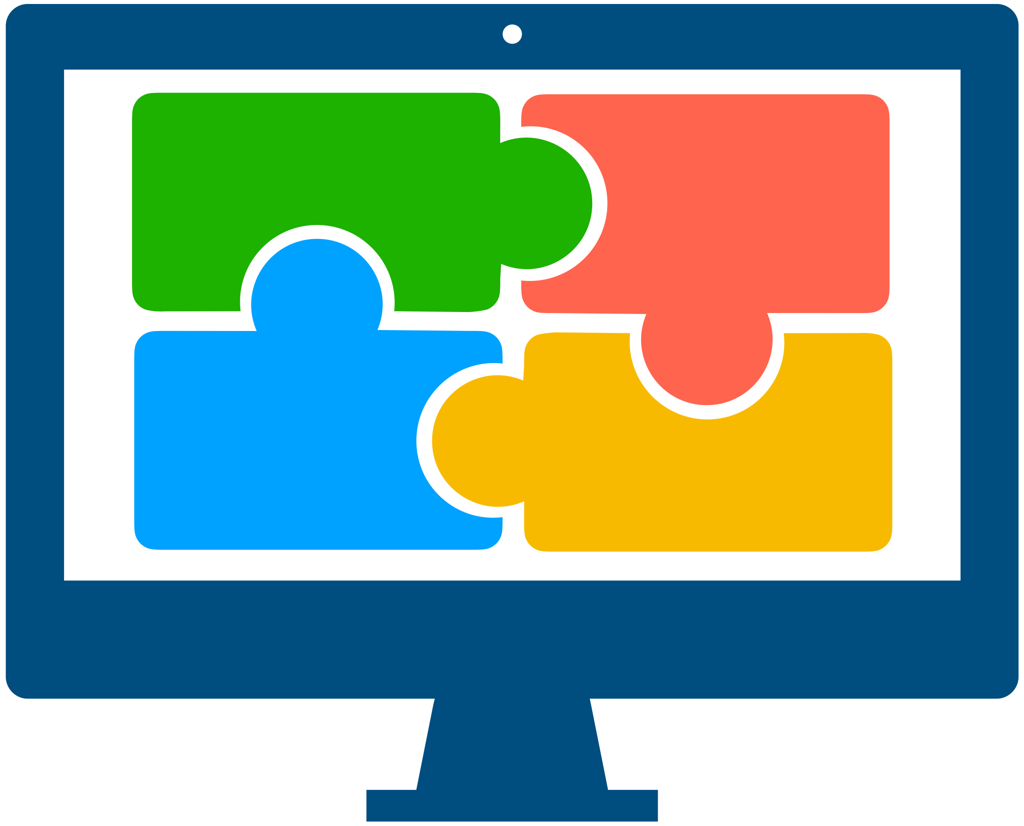


Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Esercitazione #3

Ricorsione ben fondata

[Ex. 1] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione vars tale che data un' espressione aritmetica a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono nell'espressione aritmetica a. Poi provare per induzione sulle regole che

$$\forall a \in Aexp, \forall \sigma \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\langle a, \sigma \rangle \to n \qquad \text{implica} \qquad (\forall y \in vars(a).\, \sigma(y) = \sigma'(y)) \Rightarrow \langle a, \sigma' \rangle \to n\ ).$$

se due memorie coincidono su tutte le variabili che appaiono in un'espressione, allora valutando l'espressione nelle due memorie dà lo stesso risultato

Ex. 1, Vars

$$vars : Aexp \to \wp(Ide)$$

$$\begin{array}{rcl} vars(n) & \triangleq & \emptyset \\ vars(x) & \triangleq & \{x\} \\ vars(a_1 \ \mathsf{op}\ a_2) & \triangleq & vars(a_1) \cup vars(a_2) \end{array}$$

(ricorsione ben fondata:
relazione immediata di sotto termine)

Ex. 1, Induzione

$$P(\langle a, \sigma \rangle \to n) \triangleq \forall \sigma'. \ (\forall y \in vars(a). \ \sigma'(y) = \sigma(y)) \Rightarrow \langle a, \sigma' \rangle \to n$$

$$\frac{}{\langle n, \sigma \rangle \to n} \ \text{(num)}$$

$$P(\langle n, \sigma \rangle \to n) \triangleq \forall \sigma'. \ \underbrace{\boxed{(\forall y \in \underbrace{\boxed{vars(n)}}_{\emptyset}. \ \sigma'(y) = \sigma(y))}}_{\mathbf{tt}} \Rightarrow \langle n, \sigma' \rangle \to n$$

per regola (num) $\langle n, \sigma' \rangle \to n$

Ex. 1, Induzione

$$P(\langle a, \sigma \rangle \to n) \triangleq \forall \sigma'.\ (\forall y \in vars(a).\ \sigma'(y) = \sigma(y)) \Rightarrow \langle a, \sigma' \rangle \to n$$

$$\frac{}{\langle x, \sigma \rangle \to \sigma(x)}\ \text{(ide)}$$

$$P(\langle x, \sigma \rangle \to \sigma(x)) \triangleq \forall \sigma'.\ \boxed{(\forall y \in \underbrace{\boxed{vars(x)}}_{\{x\}}.\ \sigma'(y) = \sigma(y))}_{\sigma'(x) = \sigma(x)} \Rightarrow \langle x, \sigma' \rangle \to \sigma(x)$$

Assumiamo

$$\sigma'(x) = \sigma(x)$$

per regola (ide) $\langle x, \sigma' \rangle \to \sigma'(x) = \sigma(x)$

Ex. 1, Induzione

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \to n_1 \quad \langle a_2, \sigma \rangle \to n_2}{\langle a_1 \ \mathsf{op}\ a_2, \sigma \rangle \to n_1 \ op \ n_2}$$

Assumiamo

$$P(\langle a_i, \sigma \rangle \to n_i) \triangleq \forall \sigma'. \ (\forall y \in vars(a_i). \ \sigma'(y) = \sigma(y)) \Rightarrow \langle a_i, \sigma' \rangle \to n_i$$

Vogliamo provare

$$P(\langle a_1 \ \mathsf{op}\ a_2, \sigma \rangle \to n_1 \ op \ n_2) \triangleq \forall \sigma'.$$

$$(\forall y \in vars(a_1 \ \mathsf{op}\ a_2). \ \sigma'(y) = \sigma(y)) \Rightarrow \langle a_1 \ \mathsf{op}\ a_2, \sigma' \rangle \to n_1 \ op \ n_2$$

Assumiamo

$$\boxed{\forall y \in \underbrace{\boxed{vars(a_1 \ \mathsf{op}\ a_2)}}_{vars(a_1) \cup vars(a_2)}. \ \sigma'(y) = \sigma(y)}$$

$$(\forall y \in vars(a_1).\sigma'(y) = \sigma(y)) \wedge (\forall y \in vars(a_2).\sigma'(y) = \sigma(y))$$

per ipotesi induttiva

$$\langle a_1, \sigma' \rangle \to n_1 \quad \text{E} \quad \langle a_2, \sigma' \rangle \to n_2$$

per regola (op) $\langle a_1 \ \mathsf{op}\ a_2, \sigma' \rangle \to n_1 \ op \ n_2$

[Ex. 2] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione vars tale che data una comando a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono a sinistra degli assegnamenti.
Poi provare per induzione sulle regole che

$$\langle c, \sigma \rangle \to \sigma' \qquad \text{implica} \qquad \forall x \notin vars(c).\ \sigma(x) = \sigma'(x).$$

se una variabile non appare in un'assegnamento allora il suo valore iniziale viene conservato nello store finale

Ex. 2, Vars

$$vars : Com \to \wp(Ide)$$

$$\begin{aligned}
vars(\mathbf{skip}) &\triangleq \emptyset \\
vars(x := a) &\triangleq \{x\} \\
vars(c_1; c_2) &\triangleq vars(c_1) \cup vars(c_2) \\
vars(\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_1\ \mathbf{else}\ c_2) &\triangleq vars(c_1) \cup vars(c_2) \\
vars(\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c) &\triangleq vars(c)
\end{aligned}$$

ricorsione ben fondata:
relazione immediata di sotto termine

Ex. 2, Induzione

$$P(\langle c, \sigma \rangle \to \sigma') \triangleq \forall y \notin vars(c).\ \sigma'(y) = \sigma(y)$$

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \to \sigma}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \to \sigma) \triangleq \boxed{\forall y \notin \underbrace{\boxed{vars(\mathbf{skip})}}_{\emptyset}.\ \sigma(y) = \sigma(y)}$$

$$\forall y.\ \sigma(y) = \sigma(y)$$

ovvio

Ex. 2, Induction

$$P(\langle c, \sigma \rangle \to \sigma') \triangleq \forall y \notin vars(c).\ \sigma'(y) = \sigma(y)$$

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \to n}{\langle x := a, \sigma \rangle \to \sigma[^n/_x]}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle x := a, \sigma \rangle \to \sigma[^n/_x]) \triangleq \boxed{\forall y \notin \underbrace{\boxed{vars(x := a)}}_{\{x\}}.\ \sigma[^n/_x](y) = \sigma(y)}$$

$$\forall y \neq x.\ \sigma[^n/_x](y) = \sigma(y)$$

per def di $\sigma[^n/_x]$

Ex. 2

$$\frac{\langle c_1, \sigma \rangle \to \sigma'' \quad \langle c_2, \sigma'' \rangle \to \sigma'}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to \sigma'}$$

Assumiamo

$$P(\langle c_1, \sigma \rangle \to \sigma'') \triangleq \forall y \notin vars(c_1).\ \sigma''(y) = \sigma(y)$$

$$P(\langle c_2, \sigma'' \rangle \to \sigma') \triangleq \forall y \notin vars(c_2).\ \sigma'(y) = \sigma''(y)$$

Vogliamo provare

$$P(\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \to \sigma') \triangleq \boxed{\forall y \notin \underbrace{\boxed{vars(c_1; c_2)}}_{vars(c_1) \cup vars(c_2)}.\ \sigma'(y) = \sigma(y)}$$

Prendiamo $\quad \forall y \notin vars(c_1) \cup vars(c_2).\ \sigma'(y) = \sigma(y)$

$$y \notin vars(c_1) \cup vars(c_2)$$

Dal momento che

$y \notin vars(c_2)$ allora per ip. ind. $\sigma'(y) = \sigma''(y)$

Dal momento che

$y \notin vars(c_1)$ allora per ip. ind. $\sigma''(y) = \sigma(y)$

Quindi $\sigma'(y) = \sigma(y)$

Ex. 2

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{tt} \quad \langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_1\ \mathbf{else}\ c_2, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

Assumiamo

$$P(\langle c_1, \sigma\rangle \to \sigma') \triangleq \forall y \notin vars(c_1).\ \sigma'(y) = \sigma(y)$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_1\ \mathbf{else}\ c_2, \sigma\rangle \to \sigma') \triangleq \forall y \notin \boxed{vars(\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_1\ \mathbf{else}\ c_2)}.\ \sigma'(y) = \sigma(y)$$

$$vars(c_1) \cup vars(c_2)$$

$$\forall y \notin vars(c_1) \cup vars(c_2).\ \sigma'(y) = \sigma(y)$$

Prendiamo

$$y \notin vars(c_1) \cup vars(c_2)$$

Dal momento che

$y \notin vars(c_1)$ allora per ip. ind. $\sigma'(y) = \sigma(y)$

Ex. 2

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \to \mathbf{false}}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma\rangle \to \sigma) \triangleq \boxed{\forall y \notin \underbrace{\boxed{vars(\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)}}_{vars(c)}.\ \sigma(y) = \sigma(y)}$$

$$\forall y \notin vars(c).\ \sigma(y) = \sigma(y)$$

ovvio

Ex. 2

$$\frac{\langle b,\sigma\rangle \to \mathbf{true} \quad \langle c,\sigma\rangle \to \sigma'' \quad \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c,\sigma''\rangle \to \sigma'}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c,\sigma\rangle \to \sigma'}$$

Assumiamo

$$P(\langle c,\sigma\rangle \to \sigma'') \triangleq \forall y \notin vars(c).\ \sigma''(y) = \sigma(y)$$

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c,\sigma''\rangle \to \sigma') \triangleq \forall y \notin \underbrace{\boxed{vars(\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)}}_{vars(c)}.\ \sigma'(y) = \sigma''(y)$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c,\sigma\rangle \to \sigma') \triangleq \underbrace{\boxed{\forall y \notin \underbrace{\boxed{vars(\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c)}}_{vars(c)}.\ \sigma'(y) = \sigma(y)}}_{\forall y \notin vars(c).\ \sigma'(y) = \sigma(y)}$$

Prendiamo $y \notin vars(c)$

Dal momento che $y \notin vars(c)$ allora per ip. ind. $\sigma'(y) = \sigma''(y)$

Dal momento che $y \notin vars(c)$ allora per ip. ind. $\sigma''(y) = \sigma(y)$

Quindi $\sigma'(y) = \sigma(y)$

Funzioni monotone e continue

$[\mathbf{Ex.}\ \mathbf{3}]$ Consideriamo l' $\mathrm{OPC}_\perp$ $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$. Proviamo che per ogni set $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. la funzione $f_S : \wp(\mathbb{N}) \to \wp(\mathbb{N})$ tale che $f_S(X) = X \cap S$ e' continua
2. la funzione $g_S : \wp(\mathbb{N}) \to \wp(\mathbb{N})$ tale che $g_S(X) = X \cup S$ e' continua

omettiamo di controllare la monotonicita'

Ex. 3, Continuita'

Prendiamo una catena $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\qquad f_S(X) = X \cap S$

Vogliamo provare $\quad f_S\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_S(X_i)$

$$f_S\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) \cap S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X_i \cap S) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_S(X_i)$$

per def $\qquad$ per distributivita' $\qquad$ per def

Ex. 3, Continuity

Prendiamo una catena $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $g_S(X) = X \cup S$

Vogliamo provare $$g_S\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_S(X_i)$$

$$g_S\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) \cup S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (X_i \cup S) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_S(X_i)$$

def def per idempotenza per def

[Ex. 4] Provare che ogni funzione che preserva il limite e' monotona.

Ex. 4, Funzioni che preservano il limite

$(D, \sqsubseteq_D)$ CPO $\quad (E, \sqsubseteq_E)$ CPO $\quad f : D \to E$ preservano il limite

$$f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i)$$

vogliamo provare la monotonicita'

prendiamo $\quad d \sqsubseteq_D d'$

vogliamo provare $\; f(d) \sqsubseteq_E f(d')$

consideriamo $\quad d_i = \begin{cases} d & \text{if } i = 0 \\ d' & \text{otherwise} \end{cases}$ $\quad$ quindi $\quad \displaystyle\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i = d'$

allora

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) = f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) = f(d')$$

e $\quad f(d) = f(d_0) \sqsubseteq_E \displaystyle\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) = f(d')$

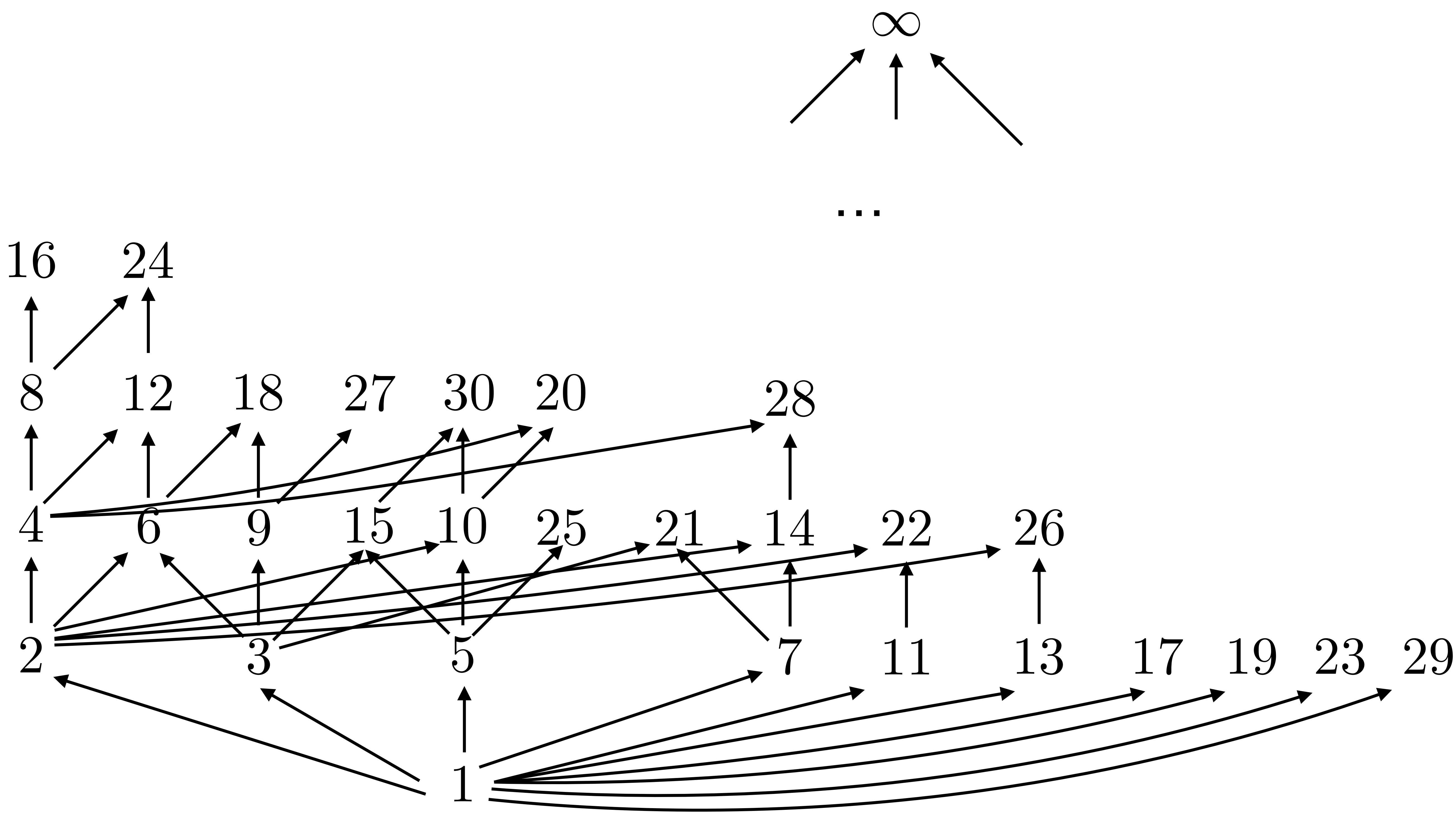
OPC

[Ex. 5] Sia $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\} \cup \{\infty\}$ e $\sqsubseteq \subseteq (D \times D)$ tale che

- per ogni $n, m \in D \cap \mathbb{N}$, definiamo $n \sqsubseteq m$ se n divide m;
- per ogni $x \in D$, definiamo $x \sqsubseteq \infty$.

E' $(D, \sqsubseteq)$ un OPC$_\perp$?

Ex. 5, divide



∞
...
16
24
8
12
18
27
30
20
28
4
6
9
15
10
25
21
14
22
26
2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
1

Ex. 5, divide

$OPC_\perp?$

riflessivo?

$d \in D$ — $d \in \mathbb{N}$ — d divide d — $d \sqsubseteq d$

$d \in D$ — $d = \infty$ — $\infty \sqsubseteq \infty$

antisimmetrico?

$d_1, d_2 \in D$ — $d_1 \sqsubseteq d_2$, $d_2 \sqsubseteq d_1$ — $d_1 \stackrel{?}{=} d_2$

$d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ — d_1 divide d_2, d_2 divide d_1 — $d_1 \leq d_2$, $d_2 \leq d_1$ — $d_1 = d_2$

$d_1 = \infty$ — $\infty \sqsubseteq d_2$ — $d_2 = \infty$ — $d_2 = \infty = d_1$

$d_2 = \infty$ — $\infty \sqsubseteq d_1$ — $d_1 = \infty$ — $d_1 = \infty = d_2$

Ex. 5, divides

$OPC_\perp?$

transitivo?

$d_1, d_2, d_3 \in D$ $\quad d_1 \sqsubseteq d_2$ $\quad d_2 \sqsubseteq d_3$ $\quad d_1 \stackrel{?}{\sqsubseteq} d_3$

$d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$ $\quad d_1 \text{ divide } d_2$ $\quad d_2 \text{ divide } d_1$ $\quad d_1 \text{ divide } d_3$ $\quad d_1 \sqsubseteq d_3$

$d_1 = \infty$ $\quad d_2 = d_3 = \infty$ $\quad \infty \sqsubseteq \infty$

$d_2 = \infty$ $\quad d_3 = \infty$ $\quad d_1 \sqsubseteq \infty$

$d_3 = \infty$ $\quad d_1 \sqsubseteq \infty$

bottom? 1 divide ogni numero e $1 \sqsubseteq \infty$

Ex. 5, divides

$OPC_{\perp}$?

completo?

- ogni catena finita ha un limite
- catene infinite possono contenere solo numeri sempre piu' grandi, allora il limite e' ∞

Punti fissi

[**Ex. 6**] Definiamo due funzioni $f_i : D_i \to D_i$ su due OPC D_i per $i \in \{1, 2\}$ (non necessariamente con bottom) tali che:

1. f_1 è continua, ha punti fissi ma non minimo punto fisso;

2. f_2 è continua e non ha punti fissi.

Ex. 6, punti fissi

1. f_1 è continua, ha punti fissi ma non minimo punto fisso;

Troviamo un esempio minimale
Di quanti elementi abbiamo bisogno come minimo?
Come dovrebbero essere ordinati?

Ex. 6, punti fissi

1. f_1 è continua, ha punti fissi ma non minimo punto fisso;

$D_1 = (\{0,1\}, =)$ $\qquad f_1 : D_1 \to D_1$

OPC
finito: ogni funzione monotona e' continua

$f_1(0) = 0$

$f_1(1) = 1$

il th di Kleene non e' applicabile: perche'?

Ex. 6, punti fissi

2. f_2 è continua e non ha punti fissi;

Troviamo un esempio minimale
Di quanti elementi abbiamo bisogno come minimo?
Come dovrebbero essere ordinati?

Ex. 6, punti fissi

2. f_2 è continua e non ha punti fissi;

$D_2 = D_1 = (\{0,1\}, =) \qquad f_2 : D_2 \to D_2$

OPC

finito: ogni funzione monotona e' continua

$f_2(0) = 1$

$f_2(1) = 0$

il th di Kleene non e' applicabile: perche'?

[**Ex.7**] Siano D, E due $OPC_\perp$ e siamo $f : D \to E$ e $g : E \to D$ due funzioni continue. La loro composizione $h = g \circ f : D \to D$ e $k = f \circ g : E \to E$ sono continue e per questo hanno punti fissi.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[loop left, "h=g\circ f"] \arrow[rr, bend left, "f"] & & E \arrow[ll, bend left, "g"] \arrow[loop right, "k=f\circ g"] \end{tikzcd}$$

Sia $e_0 = fix(k) \in E$. Provare che $g(e_0) = fix(h) \in D$ mostrando che

1. $g(e_0)$è un puntofisso per h;
2. $g(e_0)$ è il minimo pre-puntofisso per h.

Ex. 7, composizione

$$\begin{tikzcd} D \arrow[loop left, "h=g\circ f"] \arrow[r, bend left, "f"] & E \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "k=f\circ g"] \end{tikzcd} \qquad e_0 = \mathrm{fix}(k)$$

1. $g(e_0)$ è un punto fisso per h;

dobbiamo provare $h(g(e_0)) = g(e_0)$

$$h(g(e_0)) = g(f(g(e_0))) = g(k(e_0)) = g(e_0)$$

per def per def $e_0 = \mathrm{fix}(k)$

Ex. 7, composizione

$$\begin{tikzcd} D \arrow[loop left, "h=g\circ f"] \arrow[r, bend left, "f"] & E \arrow[loop right, "k=f\circ g"] \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad e_0 = \mathrm{fix}(k)$$

2. $g(e_0)$ è il minimo pre-puntofisso per h;

prendiamo

$d \sqsupseteq_D h(d)$ vogliamo provare $g(e_0) \sqsubseteq_D d$

$d \sqsupseteq_D h(d) = g(f(d))$ (by def of h)

$f(d) \sqsupseteq_E f(g(f(d))) = k(f(d))$ (per monotonicita' di f, def. k)

$$\left.\begin{array}{l} \text{percio' } f(d) \text{ e' un pre-puntofisso of } k \\ e_0 \text{ e' il minimo pre-puntofisso of } k \end{array}\right\} \Rightarrow e_0 \sqsubseteq_E f(d)$$

$g(e_0) \sqsubseteq_D g(f(d)) = h(d) \sqsubseteq_D d$ (per mon. g , def. h , ipo. d)