

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)**Nome:****Cognome:****Matricola:**1) Si risolve il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & - & 4x_2 \\ & x_1 & - & x_2 \leq 1 \\ & x_1 & & \leq 4 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq 2 \\ & & & x_2 \leq 6 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplexso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato.

SVOLGIMENTO

$$\text{it.1) } B = \{3, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_B = cA_B^{-1} = [1 \quad -4] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \quad -3], \quad y_N = 0, \quad y = [0 \quad 0 \quad -1 \quad -3]$$

[base primale degenerare e duale non degenerare] $h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{3, 4\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i\xi > 0\} = \{1, 2\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x) / A_i \xi, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i : i \in J\} = 0$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 2 \quad [\text{cambio di base degenerare}]$$

$$\text{it.2) } B = \{2, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_B = [1 \quad -4] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -4], \quad y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -4]$$

[base primale degenerare e duale non degenerare] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_1 = 3, \quad k = 1$$

$$\text{it.3) } B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

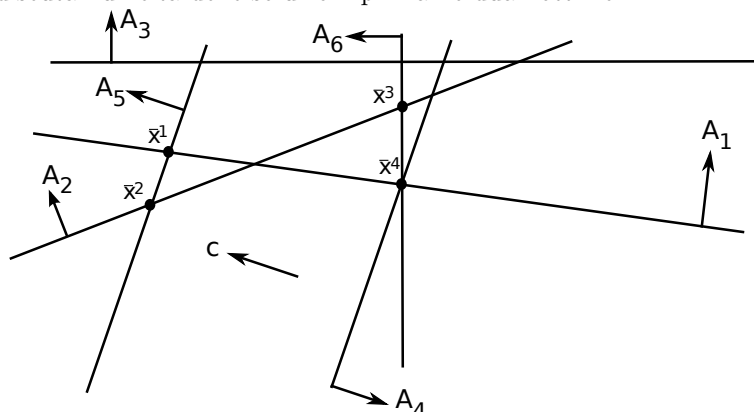
$$y_B = [1 \quad -4] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [4 \quad -3], \quad y = [4 \quad -3 \quad 0 \quad 0]$$

[base primale non degenerare e duale non degenerare] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N\xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J = \emptyset$$

STOP. ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota.

2) Si risolva graficamente il problema di PL in figura, utilizzando l’algoritmo del Simpleso Duale a partire dalla base $B = \{ 1 , 5 \}$; si noti che c , A_4 ed A_5 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l’indice entrante k , i segni delle componenti dei vettori \bar{y}_B e η_B e l’indice uscente h , giustificando le risposte. Si discuta inoltre l’eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l’unicità delle soluzioni primali e duali ottime.



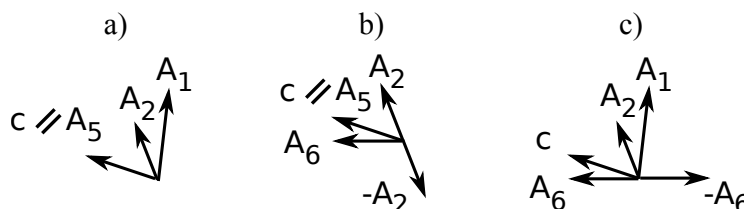
SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{ 1 , 5 \}$. La soluzione primale di base \bar{x}^1 viola i vincoli 2 e 6, pertanto $k = \min\{2, 6\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5 ; quindi la base è duale degenere, ed è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, A_5)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_5 > 0$; poiché però $c \in \text{cono}(A_2, A_5)$ ma $c \notin \text{cono}(A_1, A_2)$, deve necessariamente risultare $h = 1$. Un modo diverso di ottenere lo stesso risultato è notare che, poiché $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_1/\eta_1 = 0$ mentre $\bar{y}_5/\eta_5 > 0$.

it. 2): $B = \{ 2 , 5 \}$. La soluzione primale di base \bar{x}^2 viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5 ; quindi la base è ancora duale degenere, e rimane primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^2)$. Poiché $A_6 \in \text{cono}(-A_2, A_5)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_2 < 0$ e $\eta_5 > 0$; pertanto $h = 5$.

it. 3): $B = \{ 2 , 6 \}$. La soluzione primale di base \bar{x}^3 viola il solo vincolo 1, pertanto $k = 1$. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_2 e A_6 ; quindi la base è duale non degenere, ed è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^3)$. Poiché $A_1 \in \text{cono}(A_2, -A_6)$, come mostrato in figura (c), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_6 < 0$; pertanto $h = 2$.

it. 4): $B = \{ 1 , 6 \}$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_6 (si veda ancora la figura (c)); quindi la base è duale non degenere, ma è stavolta primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^4) = \{1, 4, 6\}$. La soluzione primale di base \bar{x}^4 non viola alcun vincolo: l’algoritmo quindi termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale.



È facile verificare che la soluzione ottima del primale è unica; in effetti, è l’unica soluzione *ammissibile* del primale. Poiché la base è primale degenere, la soluzione ottima del duale invece non è necessariamente unica. Per accertarsene si consideri che c ed A_4 sono collineari ma di verso opposto, ossia $c = -\alpha A_4$ per un qualche $\alpha > 0$. Poiché per la soluzione di base duale determinata all’ultima iterazione si ha

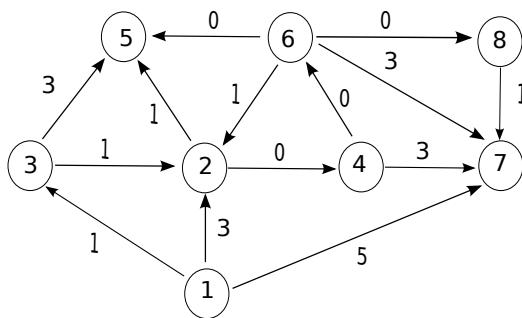
$$\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_6 A_6 = c = -\alpha A_4$$

possiamo dire che, ad esempio

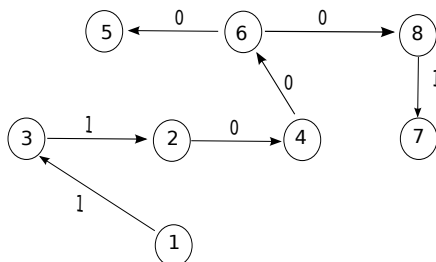
$$2\bar{y}_1 A_1 + 2\bar{y}_6 A_6 + \alpha A_4 = c ,$$

e questo indica come esista una diversa soluzione ammissibile del duale che rispetta le condizioni degli scarti complementari con \bar{x}^4 , e quindi è anch’essa ottima.

3) Dato il grafo in figura



si consideri l'albero T



Si verifichi se T sia un albero dei cammini minimi di radice 1 per il grafo in figura. Inoltre, si discuta l'eventuale ottimalità di T nel caso in cui l'arco $(4, 6)$ costi 2 invece che 0. Nel caso in cui T non sia un albero ottimo, si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 per lo scenario $c_{46} = 2$, e se ne discuta l'unicità. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Mediante una visita di T a partire dal nodo 1, è possibile calcolare il costo dell'unico cammino in T da 1 a i , per ogni nodo i , e memorizzarlo in un'etichetta $d(i)$. Nel caso in questione la procedura di visita restituisce il seguente insieme di etichette:

$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$
0	2	1	2	2	2	3	2

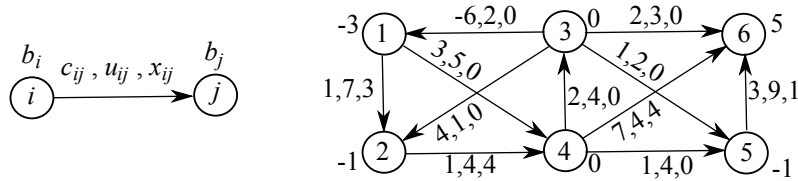
Poiché gli archi non appartenenti a T soddisfano le condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$, $\forall (i, j) \notin T$, segue che T è un albero dei cammini minimi di radice 1 per il grafo indicato.

Nel caso in cui $c_{46} = 2$, vanno aggiornate le etichette dei discendenti del nodo 6 in T , ottenendo il nuovo insieme di etichette:

$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$
0	2	1	2	4	4	5	4

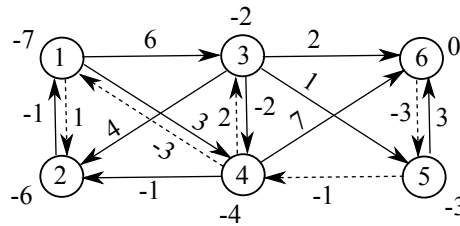
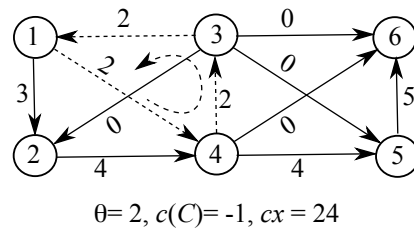
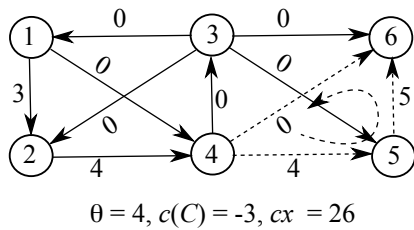
Per verificare l'eventuale ottimalità di T nel nuovo scenario, è sufficiente verificare la validità delle condizioni di Bellman per gli archi, non appartenenti a T , entranti nei nodi 5, 6, 7 e 8, ovvero $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$ e $(6, 7)$. L'arco $(2, 5)$ non soddisfa le condizioni di Bellman, pertanto T non è più un albero dei cammini minimi di radice 1. Per individuare un albero ottimo per lo scenario $c_{46} = 2$, basta inserire l'arco $(2, 5)$ al posto di $(6, 5)$. In tal modo, infatti, la validità delle condizioni di Bellman è ripristinata per ogni arco non appartenente all'albero. Si osservi che tale albero non è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1, in quanto sia $(1, 7)$ che $(4, 7)$ soddisfano le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e ognuno di essi può essere inserito nell'albero individuato al posto dell'arco $(8, 7)$.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato di costo $cx = 38$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si verifichi se la soluzione ottenuta è unica, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

L'algoritmo esegue due iterazioni, illustrate dalle prime due figure in alto (da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ , nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C , con il relativo costo cx . La terza figura, in basso al centro, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x , che è quindi un flusso di costo minimo.



La soluzione ottima non è unica, in quanto esistono nel grafo residuo cicli aumentanti di costo nullo. L'arco $(3,6)$, non appartenente all'albero dei cammini minimi, rispetta le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza (infatti $d_3 + c_{36} = -2 + 2 = 0 = d_6$). Tale arco, aggiunto all'albero dei cammini minimi, individua il ciclo orientato $(3,6,5,4)$ nel grafo residuo, che corrisponde ad un ciclo aumentante di costo nullo.

5) Si consideri il seguente problema di *PL*:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & +2x_2 & +\alpha x_3 \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 \leq 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Assumendo $\alpha = 1$, si individui una soluzione ottima utilizzando la teoria della dualità della *PL*. Successivamente si indichi per quali valori di α la soluzione individuata rimane ottima. Giustificare le risposte. (*Suggerimento*: si utilizzino le condizioni degli scarti complementari per la coppia simmetrica di problemi di *PL*, ricavandole se necessario da quelle, note, per la coppia asimmetrica.)

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia simmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} \qquad (D) \quad \min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P) . Allora, \bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione \bar{y} ammissibile per (D) complementare a \bar{x} , ovvero tale che \bar{x} e \bar{y} verifichino le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 \quad ; \quad (\bar{y}A - c)\bar{x} = 0.$$

Per l'ammissibilità di \bar{x} e \bar{y} , le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad (\bar{y}A^j - c_j)\bar{x}_j = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Per dimostrare la proposizione, formuliamo (P) come primale della coppia asimmetrica, e scriviamo il corrispondente problema duale, ovvero:

$$(P') \quad \max\{cx : Ax \leq b, -x \leq 0\} \qquad (D') \quad \min\{yb : yA - Iw = c, (y, w) \geq 0\}.$$

Formuliamo quindi le condizioni degli scarti complementari per la coppia (P') e (D') . In base a tali condizioni, data una soluzione \bar{x} ammissibile per (P) , \bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione (\bar{y}, \bar{w}) ammissibile per (D') tale che

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 \quad ; \quad \bar{w}\bar{x} = 0.$$

Essendo tali condizioni equivalenti a $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 \quad ; \quad (\bar{y}A - c)\bar{x} = 0$, la proposizione è dimostrata.

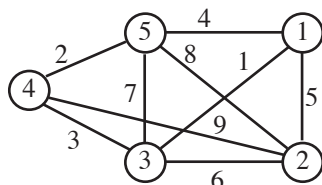
Scriviamo ora il problema duale di (P) nel caso in cui $\alpha = 1$:

$$(D) \quad \begin{array}{rcl} \min & 2y & \\ & 2y & \geq 1 \\ & y & \geq 2 \\ & 2y & \geq 1 \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

È immediato verificare che l'unica soluzione ottima di (D) è $\bar{y} = 2$. Di conseguenza, applicando le condizioni degli scarti complementari per la coppia simmetrica di problemi duali, una soluzione primale \bar{x} , che formi con \bar{y} una coppia di soluzioni complementari, deve soddisfare le condizioni $\bar{x}_1 = \bar{x}_3 = 0$. Affinché \bar{x} sia ammissibile per (P) , deve quindi valere $\bar{x}_2 = 2$. L'unica soluzione ottima di (P) è pertanto $\bar{x} = [0, 2, 0]$.

Per α generico, tale soluzione resta ottima finché $\max\{2, \alpha/2\} = 2$, ovvero per $\alpha \leq 4$. In particolare, se $\alpha > 4$ la soluzione $\bar{y} = 2$ non è più ammissibile perché viola il terzo vincolo di (D) . La soluzione ottima duale diventa $y^* = \alpha/2$, il terzo vincolo duale risulta essere l'unico vincolo attivo e quindi, per le condizioni degli scarti complementari, l'unica soluzione ottima primale diventa $[0, 0, 1]$.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo col più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r - 1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti breadth-first l'albero delle decisioni, ossia si implementi Q come una fila, e si inseriscano in coda i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di lati fissati a zero. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (la radice conta per uno); se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichino la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con \underline{z} la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

Nodo radice L'MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ ed occorre procedere col branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti e creare i $3(3 - 1)/2 = 3$ figli, inseriti in Q in quest'ordine, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{1, 5\}$.

$x_{12} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 16$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 16 < z = +\infty$, occorre procedere col branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre lati incidenti, e creare i tre figli, inseriti in Q in quest'ordine, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ e $\{3, 4\}$.

$x_{13} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $20 < z = +\infty$, si pone $z = 20$; inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità (poiché $\underline{z} = 20 \geq z = 20$, il nodo viene anche chiuso dalla valutazione inferiore).

$x_{15} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 17$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 17 < z = 20$, occorre procedere col branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre lati incidenti, e creare i tre figli, inseriti in Q in quest'ordine, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ e $\{3, 4\}$.

$x_{12} = x_{13} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 22$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 22 > z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$x_{12} = x_{23} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (f). Poiché $\underline{z} = 18 < z = 20$, occorre procedere col branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e creare i tre figli, inseriti in Q in quest'ordine, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$ e $\{4, 5\}$.

Poiché il massimo numero di nodi è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione inferiore globale è pari a $\min\{z, \min\{\underline{z}(P') : P' \in Q'\}\}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q . In questo caso Q' contiene i nodi $x_{12} = 0$, $x_{15} = 0$ e $x_{12} = x_{23} = 0$; pertanto la miglior valutazione inferiore disponibile quando l'algoritmo termina è $\min\{20, \min\{16, 17, 18\}\} = 16$, ed il gap relativo a terminazione è $(20 - 16)/16 = 25\%$.

