

008AA – ALGORITMICA E LABORATORIO

Esame del 7 luglio 2011

Cognome Nome:

N. Matricola:

Corso: A B

Esercizio 1. (*3+4+4+4 punti*) Sia dato un insieme $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ di n elementi distinti. Si definisce mediano di S , indicato con \widehat{S} , l'elemento dell'insieme che ha rango $r = \lfloor n/2 \rfloor$ e quindi è l' r -esimo elemento più piccolo di S .

1. Si progetti un algoritmo deterministico che calcola \widehat{S} e se ne calcoli la complessità in tempo.
2. Si progetti un algoritmo randomizzato che calcola \widehat{S} in tempo $O(n)$ al caso medio (dimostrandolo).
3. Si progetti un algoritmo che, ricevuto in ingresso un intero $k < n$, un generico insieme S di n interi e il suo mediano \widehat{S} , calcola i k elementi di S più vicini a \widehat{S} . Se ne calcoli la complessità in tempo.
[Suggerimento: esiste una soluzione in tempo $O(n \log k)$ utilizzando uno heap che contiene i k elementi che sono più vicini a \widehat{S} tra quelli esaminati fino a quel momento.]
4. Si progetti un algoritmo deterministico che calcola \widehat{S} in tempo $O(n)$ al caso pessimo nell'ipotesi che gli elementi di S siano interi di valore minore di n^2 .

Esercizio 2. (*3+5+2 punti*) Sia dato un albero binario T di radice r e si definisca la dimensione di un nodo u come il numero dei suoi nodi discendenti, incluso u stesso (dove, per convenzione, $u = null$ ha dimensione pari a zero). Diciamo che u è *pesante* se u è la radice r o una delle foglie di T , oppure è un nodo interno che soddisfa una delle seguenti due condizioni: (a) la dimensione di u è maggiore di quella di suo fratello (l'altro figlio di suo padre); (b) la dimensione è uguale a quella di suo fratello e u è figlio sinistro.

1. Dimostrare che esiste sempre un unico cammino dalla radice r a una foglia f in cui *tutti* i nodi attraversati da tale cammino sono *pesanti*.
2. Scrivere un algoritmo ricorsivo che non usa variabili globali e che, presa in ingresso la radice r , restituisce la foglia f del cammino suddetto. Ipotizzare che i nodi di T contengano solo i puntatori al figlio sinistro, al figlio destro e nessun altro tipo di informazione.
3. Discutere e motivare la complessità dell'algoritmo proposto.

Esercizio 3. (*3+3 punti*) Sia dato il grafo *pesato e non orientato* $G = (V, E)$ avente nodi etichettati con lettere e archi $E = \{(A, B; 4), (B, C; 16), (A, C; 14), (A, D; 28), (A, E; 32), (C, D; 8), (C, E; 1), (E, F; 7), (F, G; 9), (E, G; 5)\}$ (il numero dopo il punto-e-virgola indica il peso dell'arco).

1. Si illustri l'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra sull'esempio proposto, a partire dal vertice A , mostrando l'albero dei cammini minimi.
2. Dettagliare come evolve la coda di priorità durante l'esecuzione.