Modellistica ambientale
a.a. 2009/10
Integrazione numerica

Tecniche di integrazione numerica

Vedremo alcune tecniche per risolvere le equazioni differenziali presenti nei modelli ovvero:

- metodo di Eulero,
- metodo di Runge-Kutta del secondo odine,
- metodo di Runge-Kutta del quarto ordine.

Metodo di Eulero (1)

Il metodo di integrazione numerica che abbiamo finora usato nei diversi modelli che abbiamo visto è noto come metodo di Eulero. Consideriamo ad esempio il caso, già visto, della crescita di una popolazione. La crescita della popolazione è regolata dalla equazione differenziale:

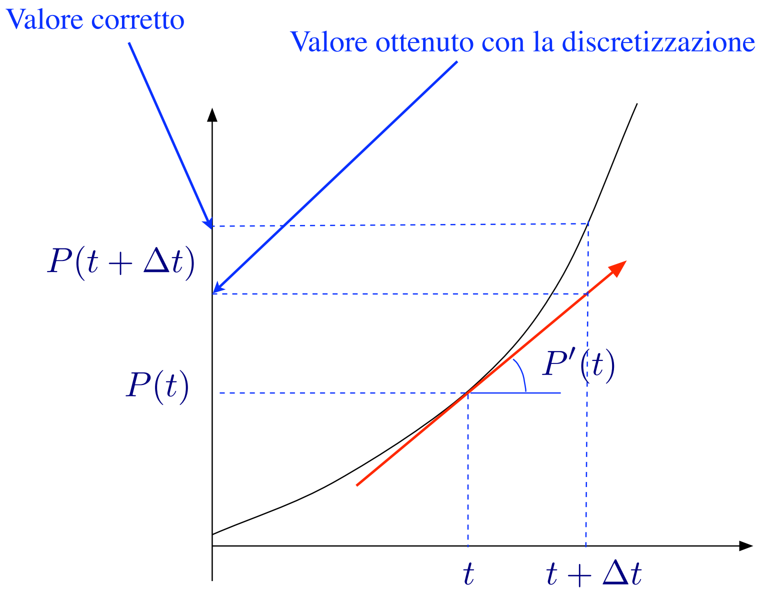
$$\frac{dP(t)}{dt} = (N - M)P(t)$$

la cui versione discretizzata è:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + (N - M)P(t)\Delta t = P(t) + P'(t)\Delta t$$

in cui $P'(t)$ è la derivata di $P(t)$.

Metodo di Eulero (2)

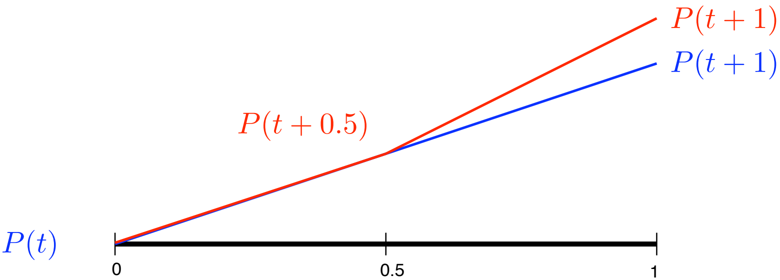


Metodo di Eulero (3)

Il problema con la formula

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P'(t)\Delta t$$

è che viene calcolato il valore di P al tempo $t + \Delta t$ a partire dal valore di P al tempo t, facendo uso della derivata di P al tempo t. Ciò porta alla situazione illustrata dalla figura, dove si vedono i diversi risultati con un intervallo di tempo pari ad 1 e con uno pari a 0.5.



Metodo di Eulero (4)

Tempo	Popolazione $\Delta t = 1$	Tempo	Popolazione $\Delta t = 0.5$	Tempo	Popolazione $\Delta t = 0.5$	Tasso di natalità (nascite per 1000)
1	1,000	1,0	1,000	1	1,000	
2	1,015	1,5	1,008	2	1,015	20
3	1,030	2,0	1,015	3	1,030	
4	1,046	2,5	1,023	4	1,046	
5	1,061	3,0	1,030	5	1,062	
6	1,077	3,5	1,038	6	1,078	
7	1,093	4,0	1,046	7	1,094	
8	1,110	4,5	1,054	8	1,110	
9	1,126	5,0	1,062	9	1,127	
10	1,143	5,5	1,070	10	1,144	
11	1,161	6,0	1,078	11	1,161	
12	1,178	6,5	1,086	12	1,179	
13	1,196	7,0	1,094	13	1,196	
14	1,214	7,5	1,102	14	1,214	
15	1,232	8,0	1,110	15	1,233	
16	1,250	8,5	1,119	16	1,251	
17	1,269	9,0	1,127	17	1,270	
18	1,288	9,5	1,135	18	1,289	
19	1,307	10,0	1,144	19	1,309	
20	1,327	10,5	1,153	20	1,328	
21	1,347	11,0	1,161	21	1,348	
22	1,367	11,5	1,170	22	1,369	
23	1,388	12,0	1,179	23	1,389	
24	1,408	12,5	1,188	24	1,410	
25	1,430	13,0	1,196	25	1,431	
26	1,451	13,5	1,205	26	1,453	
27	1,473	14,0	1,214	27	1,475	
28	1,495	14,5	1,224	28	1,497	
29	1,517	15,0	1,233	29	1,520	
30	1,540	15,5	1,242	30	1,542	

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine

In questo metodo invece di usare la derivata nel punto t come fa Eulero per poi ricavare il valore della funzione nel punto $t + \Delta t$, si utilizza la derivata in un punto intermedio dell'intervallo $[t, t + \Delta t]$. In particolare si cerca di trovare il valore della derivata nel punto di mezzo, $t + \frac{\Delta t}{2}$, cioè $(N - M)P(t + \frac{\Delta t}{2})$. In pratica tale valore è conoscibile solo in modo approssimato utilizzando la formula di Eulero:

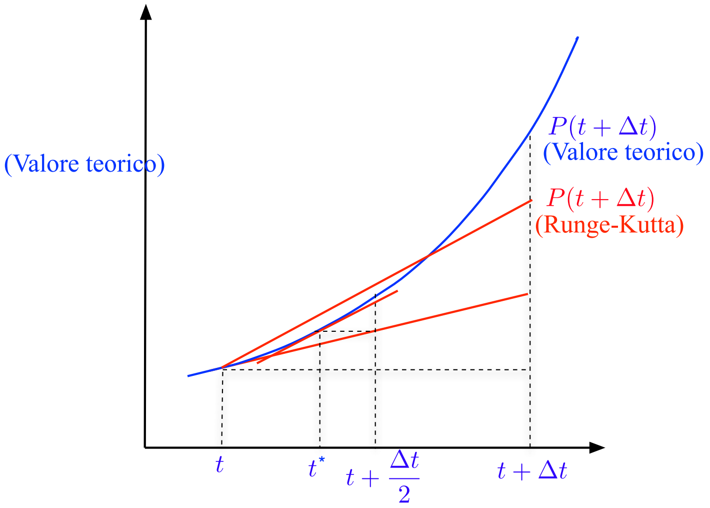
$$P(t + \frac{\Delta t}{2}) \cong P(t) + (N - M)P(t)\frac{\Delta t}{2}$$

Questo in pratica significa che la derivata trovata è la derivata nel punto (incognito) t^* tale che risulti

$$P(t^*) = P(t) + (N - M)P(t)\frac{\Delta t}{2}$$

(vedi figura seguente).

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine



Nel metodo di Runge-Kutta di ordine 2, al posto della derivata in $t+\frac{\Delta t}{2}$, si usa la sua apporossimazione calcolata con il metodo di Eulero.

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine: trattazione analitica

Dal punto di vista analitico, si parte dalla:

$$P(t+h) \cong P(t) + (N-M)P(t)h$$

(abbiamo posto per semplicità $\Delta t = h$) e si calcola il valore di P nel punto di mezzo dell'intervallo:

$$P(t+\frac{h}{2}) \cong P(t) + (N-M)P(t)\frac{h}{2}$$

da cui :

$$P(t+h) \cong P(t) + (N-M)(P(t) + (N-M)P(t)\frac{h}{2})h$$

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine: grado di approssimazione (1)

Il metodo di Eulero può essere visto come un metodo di approssimazione del primo ordine (abbiamo posto per semplicità $\Delta t = h$):

$$P(t+h) = P(t) + P'(t)h + O(h^2)$$

Col metodo di Runge-Kutta visto prima si realizza una approssimazione del secondo ordine:

$$P(t+h) = P(t) + P'(t)h + \frac{P''(t)}{2}h^2 + O(h^3)$$

da cui:

$$P(t+h) \cong P(t) + (P'(t) + P''(t)\frac{h}{2})h$$

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine: grado di approssimazione (2)

Osservando che è:

$$P'(t+\frac{h}{2}) \cong P'(t) + P''(t)\frac{h}{2}$$

sostituendo nella:

$$P(t+h) \cong P(t) + (P'(t) + P''(t)\frac{h}{2})h$$

si ha:

$$P(t+h) \cong P(t) + P'(t+\frac{h}{2})h = P(t) + (N-M)P(t+\frac{h}{2})h$$

ed essendo:

$$P(t+\frac{h}{2}) \cong P(t) + (N-M)P(t)\frac{h}{2}$$

si ottiene:

$$P(t+h) \cong P(t) + (N-M)(P(t) + (N-M)P(t)\frac{h}{2})h$$

Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (1)

Nel metodo di Runge-Kutta del quarto ordine vengono utilizzate quattro derivate, quella calcolata nel punto iniziale (al tempo t), due calcolate nel punto di mezzo dell'intervallo $[t, t+h]$ ed una calcolata nel punto terminale dell'intervallo. Si ottengono così quattro approssimazioni diverse del valore di $P(t+h)$ e se ne fa una combinazione convessa. Il primo valore che si ottiene è lo stesso che trova il metodo di Eulero:

$$P_1(t+h) \cong P(t) + (N-M)P(t)h$$

Da qui, possiamo ricavare una prima approssimazione del valore di P nel punto di mezzo dell'intervallo:

$$P_1(t+\frac{h}{2}) = P(t) + (N-M)P(t)\frac{h}{2}$$

e quindi una seconda approssimazione di $P(t+h)$:

$$P_2(t+h) = P(t) + (N-M)P_1(t+\frac{h}{2})h$$

Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (2)

Possiamo allora avere una seconda approssimazione di $P(t + h/2)$:

$$P_2(t + \frac{h}{2}) = P(t) + (N - M)P_1(t + \frac{h}{2})\frac{h}{2}$$

da cui si ricava una terza approssimazione di $P(t + h)$:

$$P_3(t + h) = P(t) + (N - M)P_2(t + \frac{h}{2})h$$

e infine una quarta approssimazione di $P(t + h)$:

$$P_4(t + h) = P(t) + (N - M)P_3(t + h)h$$

Si calcola quindi il valore di $P(t + h)$ eseguendo una combinazione convessa dei 4 valori fin qui trovati:

$$P(t + h) \cong \frac{P_1(t + h)}{6} + \frac{P_2(t + h)}{3} + \frac{P_3(t + h)}{3} + \frac{P_4(t + h)}{6}$$

Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (3): grado di approssimazione

In pratica il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine corrisponde ad approssimare $P(t+h)$ con Taylor, fermandosi al termine di grado 4:

$$P(t+h) = P(t) + P'(t)h + \frac{P''(t)}{2!}h^2 + \frac{P'''(t)}{3!}h^3 + \frac{P''''(t)}{4!}h^4 + O(h^5)$$

Metodi a confronto

$$\Delta t = 1$$