

14. Funzioni spline

A causa del comportamento oscillante dei polinomi di grado elevato spesso non è possibile utilizzare la tecnica dell'interpolazione per approssimare le funzioni. Polinomi di grado più basso si possono ottenere con le tecniche di approssimazione, ma in tal caso nei nodi i valori del polinomio approssimante non sono uguali a quelli della funzione. Se invece l'uguaglianza dei valori nei nodi è fondamentale, come ad esempio nella grafica, si possono utilizzare funzioni che coincidono a tratti con polinomi di grado basso.

L'intervallo $[a, b]$ viene diviso in n sottointervalli con $n + 1$ nodi x_i , $i = 0, \dots, n$, tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Una funzione $g(x)$ *polinomiale a tratti* su $[a, b]$ è una funzione che sull' i -esimo sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$ coincide con un polinomio di grado k_i . Di solito $k_i = k$, $i = 0, \dots, n - 1$, cioè i polinomi usati nei diversi sottointervalli hanno sempre lo stesso grado k . La funzione $g(x)$ viene quindi rappresentata per mezzo di una matrice contenente nell' i -esima riga, $i = 0, \dots, n - 1$, i coefficienti

$$a_{i,k}, \quad a_{i,k-1}, \quad \dots \quad a_{i,0}$$

dell' i -esimo polinomio

$$p_i(y) = a_{i,k}y^k + a_{i,k-1}y^{k-1} + \dots + a_{i,0},$$

dove $y = x - x_i$, cioè con la variabile traslata rispetto al punto x_i .

I casi più semplici di funzioni polinomiali a tratti sono i seguenti.

a) Polinomiale *lineare a tratti*: nell' i -esimo sottointervallo la funzione $g(x)$ coincide con il polinomio di interpolazione della $f(x)$ sui nodi x_i e x_{i+1} , cioè dall'esempio 5.17

$$p_i(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} (x - x_i) + f(x_i),$$

dove $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n - 1$. Per la sua semplicità questo metodo è usato spesso nella pratica. Inoltre se $f''(x)$ è limitata in $[a, b]$, al tendere a zero del massimo degli h_i , la funzione $g(x)$ tende alla funzione $f(x)$. Però questo metodo non è adatto per una buona rappresentazione grafica della funzione: poiché non vi è alcuna condizione sulle derivate dei due polinomi, nei nodi x_i il raccordo fra due diversi polinomi lineari presenta in generale un punto angoloso.

5.67 Esempio. I seguenti dati si riferiscono alla portata d'acqua di un fiume italiano, misurata mensilmente in m^3/sec .

mese	G	F	M	A	M	G
portata	12.51	13.05	11.7	9.26	8.3	6.25
mese	L	A	S	O	N	D
portata	5.34	4.59	5.14	6.36	10.31	13.88

Nella figura 5.25 sono riportati i grafici della polinomiale lineare a tratti (linea più spessa) e il grafico del polinomio di interpolazione di grado 11 su tutti i punti (linea sottile). Dalla figura risulta che l'andamento del polinomio di interpolazione non rende accettabile l'approssimazione. ■

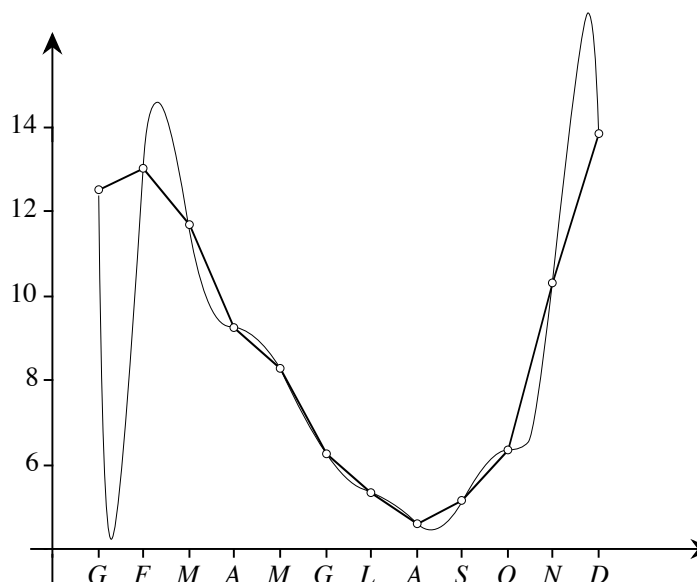


Fig. 5.25 - Grafici del polinomiale lineare a tratti e del polinomio di interpolazione.

b) Polinomiale cubica a tratti di Hermite: nell' i -esimo sottointervallo la funzione $g(x)$ coincide con il polinomio di Hermite di grado al più 3 che assume nei punti x_i e x_{i+1} gli stessi valori della $f(x)$ e la cui derivata assume nei punti x_i e x_{i+1} gli stessi valori della $f'(x)$, cioè dall'esempio 5.13:

$$\begin{aligned}
 p_i(x) &= \frac{1}{h_i^3} \left[2(f(x_i) - f(x_{i+1})) + h_i(f'(x_i) + f'(x_{i+1})) \right] y_i^3 \\
 &- \frac{1}{h_i^2} \left[3(f(x_i) - f(x_{i+1})) + h_i(2f'(x_i) + f'(x_{i+1})) \right] y_i^2 + f'(x_i) y_i + f(x_i),
 \end{aligned}$$

dove $y_i = x - x_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Queste polinomiali forniscono una migliore approssimazione della funzione e quindi consentono una migliore rappresentazione grafica, perché non danno luogo a punti angolosi nei nodi, ma non sono utilizzabili nel caso, frequente nella pratica, in cui i valori di $f'(x_i)$ non sono noti. Inoltre nei punti di raccordo i polinomi hanno la stessa pendenza, ma non la stessa concavità, per cui nei nodi si può presentare un andamento distorto.

c) Altre polinomiali a tratti possono essere costruite interpolando la $f(x)$ su più di due punti consecutivi, ad esempio considerando le cubiche che interpolano su quattro nodi. È anche possibile sfruttare altre condizioni che caso per caso possono essere fornite dal problema.

Fra le funzioni polinomiali a tratti quelle più usate nella pratica, anche perché consentono di ottenere ottimi risultati dal punto di vista grafico, sono le polinomiali cubiche ottenute senza utilizzare i valori, in generale non disponibili, delle derivate, e imponendo invece condizioni di continuità delle derivate prima e seconda.

5.68 Definizione. Siano x_0, \dots, x_n , $n+1$ punti distinti di $[a, b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Una funzione reale $s(x) \in C^2[a, b]$ viene chiamata *spline cubica* per l'approssimazione della $f(x)$ se

- a) in ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, $s(x)$ coincide con un polinomio di grado al più 3;
- b) $s(x_i) = f(x_i)$, per $i = 0, \dots, n$. ■

Indicando con $s_i(x)$, $i = 0, \dots, n-1$, il polinomio che coincide con la $s(x)$ nel sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, dalla definizione precedente si ottengono le $4n-2$ condizioni

- a) $s_i(x_i) = f(x_i)$, $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$,
- b) $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$,
- c) $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Poiché i coefficienti dei polinomi $s_i(x)$ sono $4n$, occorre imporre due condizioni aggiuntive, che vengono scelte in modo da fornire una buona approssimazione. Vari sono i criteri che possono essere seguiti per individuare queste due condizioni: per esempio

d') $s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0$,

oppure, se sono noti i valori di $f'(a)$ e $f'(b)$,

d'') $s'_0(x_0) = f'(a)$, $s'_{n-1}(x_n) = f'(b)$,

oppure, se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo $b - a$, cioè $f(a) = f(b)$,
 $d''') \quad s'_0(x_0) = s'_{n-1}(x_n), \quad s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n).$

Una spline cubica viene detta *spline naturale* se verifica le condizioni d'),
spline completa se verifica le condizioni d'') e *spline periodica* se verifica le
 condizioni d''').

Per determinare i coefficienti dei polinomi $s_i(x)$ si potrebbero sfruttare
 direttamente le condizioni a) - c) e le condizioni aggiuntive scelte, risolvendo
 un sistema lineare di $4n$ equazioni in $4n$ incognite. È possibile però ridurre il
 numero delle equazioni necessarie considerando come incognite le quantità,
 dette *momenti*,

$$\begin{aligned} \mu_i &= s''_i(x_i), \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \mu_n &= s''_{n-1}(x_n). \end{aligned}$$

Infatti, poiché $s_i(x)$ per $x \in [x_i, x_{i+1}]$ è un polinomio di grado al più 3,
 $s''_i(x)$ è di grado al più 1 e può essere così rappresentata con la formula di
 Lagrange

$$s''_i(x) = \mu_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} - \mu_i \frac{x - x_{i+1}}{h_i}, \quad (85)$$

dove $h_i = x_{i+1} - x_i$. Integrando due volte si ottiene per $i = 0, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} s'_i(x) &= \mu_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \mu_i \frac{(x - x_{i+1})^2}{2h_i} + \alpha_i, \\ s_i(x) &= \mu_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} - \mu_i \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i, \end{aligned} \quad (86)$$

e le costanti α_i e β_i vengono determinate imponendo le condizioni a)

$$\begin{cases} \mu_i \frac{h_i^2}{6} + \beta_i = f(x_i) \\ \mu_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + \alpha_i h_i + \beta_i = f(x_{i+1}), \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \beta_i = f(x_i) - \mu_i \frac{h_i^2}{6} \\ \alpha_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6} (\mu_{i+1} - \mu_i). \end{cases}$$

Restano quindi da calcolare i μ_i , $i = 0, \dots, n$. Dalle (86), imponendo le
 condizioni b) e sostituendo α_{i-1} e α_i , si ottengono le $n - 1$ relazioni

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{6} \mu_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} \mu_i + \frac{h_i}{6} \mu_{i+1} \\ = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (87)$$

Con le notazioni delle differenze divise (paragrafo 5), si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_{i-1}} &= f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] \\ &= f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}](h_{i-1} + h_i) \end{aligned}$$

e quindi la (87) può essere rappresentata come

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \mu_{i-1} + 2\mu_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \mu_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}],$$

da cui si ottiene

$$\gamma_i \mu_{i-1} + 2\mu_i + \delta_i \mu_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (88)$$

dove $\gamma_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} > 0, \quad \delta_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} > 0, \quad \gamma_i + \delta_i = 1.$

Altre due relazioni si ottengono tramite le condizioni aggiuntive. Per la spline naturale, dalle d') si ha

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_n = 0. \quad (89)$$

Per la spline completa, dalle d'') si ha:

$$\begin{aligned} s'_0(x_0) &= -\mu_0 \frac{h_0}{3} - \mu_1 \frac{h_0}{6} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} = f'(x_0), \\ s'_{n-1}(x_n) &= \mu_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} + \mu_n \frac{h_{n-1}}{3} + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_{n-1}} = f'(x_n), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{h_0}{3} \mu_0 + \frac{h_0}{6} \mu_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} - f'(x_0) \\ \frac{h_{n-1}}{6} \mu_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} \mu_n = f'(x_n) - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_{n-1}}; \end{cases} \quad (90)$$

con le notazioni delle differenze divise, tenendo conto che per la (28) è

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0), \quad f[x_n, x_n] = f'(x_n),$$

si ha

$$2\mu_0 + \mu_1 = 6f[x_0, x_0, x_1], \quad \mu_{n-1} + 2\mu_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]. \quad (91)$$

Per la spline periodica, dalle d''') si ha:

$$\begin{cases} \frac{h_{n-1} + h_0}{3} \mu_0 + \frac{h_0}{6} \mu_1 + \frac{h_{n-1}}{6} \mu_{n-1} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}}, \\ \mu_0 = \mu_n, \end{cases}$$

tenendo conto che in questo caso è $f(x_n) = f(x_0)$, con l'introduzione del punto x_{n+1} tale che $x_{n+1} - x_n = x_1 - x_0$ e $f(x_{n+1}) = f(x_1)$, si ha

$$\gamma_n \mu_{n-1} + 2\mu_n + \delta_n \mu_1 = 6f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}], \quad (92)$$

mentre la prima delle (88) può essere scritta

$$2\mu_1 + \delta_1 \mu_2 + \gamma_1 \mu_n = 6f[x_0, x_1, x_2].$$

In ogni caso i μ_0, \dots, μ_n sono soluzione di un sistema lineare, ottenuto associando alle (88) le (89) o le (91) o le (92), a seconda che debbano essere verificate le condizioni d'), o d''), o d''').

5.69 Teorema. Siano x_0, \dots, x_n , $n + 1$ punti distinti di $[a, b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Allora esiste ed è unica la spline cubica che approssima la $f(x)$ e verifica una delle condizioni d'), o d''), o d''').

Dim. Nel primo caso, tenendo conto che $\mu_0 = \mu_n = 0$, il sistema ottenuto dalle (88) è

$$\begin{bmatrix} 2 & \delta_1 & & & & \\ \gamma_2 & 2 & \delta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-2} & 2 & \delta_{n-2} & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso vengono aggiunte una prima e un'ultima equazione al sistema che diventa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \gamma_1 & 2 & \delta_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} & \\ & & & 1 & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_n] \end{bmatrix}.$$

Nel terzo caso si ha

$$\begin{bmatrix} 2 & \delta_1 & & & & & & & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 2 & \delta_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} & & & \\ \delta_n & & & & \gamma_n & 2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] \end{bmatrix}.$$

Poiché le matrici di questi sistemi hanno predominanza diagonale in senso stretto e quindi sono non singolari, i sistemi hanno una e una sola soluzione [2], che può essere calcolata con il metodo di Gauss senza scambi di righe. Nei primi due casi la matrice è tridiagonale, e quindi il metodo di Gauss ha un basso costo computazionale, dell'ordine di n . Anche nel terzo caso è possibile ricondurre il problema alla risoluzione di opportuni sistemi lineari con matrice tridiagonale, ad esempio usando la formula di Woodbury. ■

5.70 Esempio. Nella figura 5.26 è riportato il grafico della spline cubica naturale che approssima la funzione dell'esempio 5.67. Dal confronto con la figura 5.25 risulta che l'approssimazione ottenuta con le spline è migliore di quelle ottenute con la polinomiale lineare a tratti e con il polinomio di interpolazione. ■

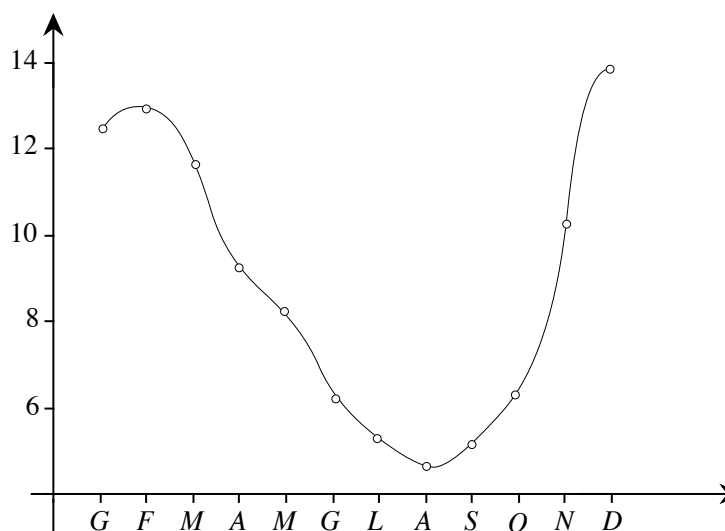


Fig. 5.26 - Grafico della spline cubica.

Se i punti x_i sono equidistanti, cioè $h_i = h$, per $i = 0, \dots, n-1$, la matrice del sistema risulta molto semplice. La (88) infatti si può scrivere,

tenendo conto della (24)

$$\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} = \frac{6}{h^2} \Delta^2 f(x_{i-1}),$$

e quindi per le spline naturali il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} \Delta^2 f(x_0) \\ \Delta^2 f(x_1) \\ \vdots \\ \Delta^2 f(x_{n-3}) \\ \Delta^2 f(x_{n-2}) \end{bmatrix}.$$

Le spline cubiche sono molto usate nella grafica perché fra le funzioni con derivata seconda continua che interpolano la funzione $f(x)$ nei nodi x_i , $i = 0, \dots, n$, sono quelle che hanno minima curvatura, cioè che oscillano meno, come risulta dal seguente teorema.

5.71 Teorema. *Fra tutte le funzioni $g(x) \in C^2[a, b]$, tali che $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, la spline cubica naturale $s(x)$ è quella che minimizza l'integrale*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx. \quad (93)$$

Dim. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [g''(x)]^2 dx - 2 \int_a^b [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx - \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (94)$$

Per ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$ si ha, integrando due volte per parti,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx &= \left[[g'(x) - s'(x)]s''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &\quad - \left[[g(x) - s(x)]s^{(3)}(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g(x) - s(x)]s^{(4)}(x) dx. \end{aligned}$$

Poiché $s(x)$ sull'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ coincide con un polinomio di grado al più 3, è $s^{(4)}(x) = 0$. Inoltre $s(x_i) = g(x_i)$, $s(x_{i+1}) = g(x_{i+1})$, per cui

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[[g'(x) - s'(x)]s''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \left[[g'(x) - s'(x)]s''(x) \right]_a^b \end{aligned}$$

e tale espressione è nulla in quanto $s''(a) = s''(b) = 0$. Dalla (94) segue che

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2 dx$$

per ogni funzione $g(x)$ a derivata seconda continua tale che $g(x_i) = f(x_i)$. ■

La $g''(x)$ è legata alla curvatura della funzione $g(x)$ nel punto x , definita come il reciproco del raggio del cerchio osculatore in x , e data dall'espressione

$$c(x) = |g''(x)|(1 + [g'(x)]^2)^{-3/2};$$

l'integrale (93) può allora essere assunto come una misura della *curvatura globale* della funzione $g(x)$, se $|g'(x)|$ è piccolo rispetto ad 1. Dal teorema 5.71 risulta quindi che la spline cubica naturale è quella che minimizza la curvatura globale. Dal teorema 5.71 segue anche che se $f(x) \in C^2[a, b]$, allora

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \quad (95)$$

A differenza di quanto accade per i polinomi che interpolano la $f(x)$ su tutto l'intervallo $[a, b]$, le funzioni spline convergono alla $f(x)$ quando si infittiscono i nodi x_i , $i = 0, \dots, n$. Valgono infatti i seguenti teoremi.

5.72 Teorema. Sia $f(x) \in C^4[a, b]$, con

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|,$$

e sia

$$H = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i.$$

Allora per i momenti della spline cubica $s(x)$ completa vale la relazione

$$\max_{i=0, \dots, n} |\mu_i - f''(x_i)| \leq \frac{3}{4} M_4 H^2. \quad (96)$$

Dim. Dalla formula di Taylor si ha

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} = f'(x_i) + \frac{h_i}{2} f''(x_i) + \frac{h_i^2}{3!} f'''(x_i) + \frac{h_i^3}{4!} f^{(4)}(\xi_{i,1}),$$

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} = f'(x_i) - \frac{h_{i-1}}{2} f''(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{3!} f'''(x_i)$$

$$- \frac{h_{i-1}^3}{4!} f^{(4)}(\xi_{i,2}),$$

$$f''(x_{i-1}) = f''(x_i) - h_{i-1} f'''(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{2} f^{(4)}(\xi_{i,3}),$$

$$f''(x_{i+1}) = f''(x_i) + h_i f'''(x_i) + \frac{h_i^2}{2} f^{(4)}(\xi_{i,4}),$$

in cui $\xi_{i,j} \in [a, b]$, per $j = 1, \dots, 4$. Posto per $i = 1, \dots, n-1$

$$g_i = \frac{h_{i-1}}{6} [\mu_{i-1} - f''(x_{i-1})] + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} [\mu_i - f''(x_i)] + \frac{h_i}{6} [\mu_{i+1} - f''(x_{i+1})],$$

sostituendo le relazioni precedenti nella (87) si ha

$$g_i = \frac{h_i^3}{12} \left[\frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{i,1}) - f^{(4)}(\xi_{i,4}) \right] + \frac{h_{i-1}^3}{12} \left[\frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{i,2}) - f^{(4)}(\xi_{i,3}) \right].$$

In modo analogo, posto

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{h_0}{3} [\mu_0 - f''(x_0)] + \frac{h_0}{6} [\mu_1 - f''(x_1)], \\ g_n &= \frac{h_{n-1}}{6} [\mu_{n-1} - f''(x_{n-1})] + \frac{h_{n-1}}{3} [\mu_n - f''(x_n)], \end{aligned}$$

dalle (90) si ottiene

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{h_0^3}{12} \left[\frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{0,1}) - f^{(4)}(\xi_{0,4}) \right], \\ g_n &= \frac{h_{n-1}^3}{12} \left[\frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{n,2}) - f^{(4)}(\xi_{n,3}) \right]. \end{aligned}$$

Passando ai moduli si ha

$$\begin{aligned} |g_0| &\leq \frac{M_4}{8} h_0^3, \\ |g_i| &\leq \frac{M_4}{8} (h_{i-1}^3 + h_i^3), \text{ per } i = 1, \dots, n-1, \\ |g_n| &\leq \frac{M_4}{8} h_{n-1}^3. \end{aligned} \tag{97}$$

Sia ora k l'indice per cui

$$|\mu_k - f''(x_k)| = \max_{i=0, \dots, n} |\mu_i - f''(x_i)|. \tag{98}$$

Se $1 \leq k \leq n-1$, si ha

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{h_{k-1}}{6} [\mu_{k-1} - f''(x_{k-1})] + \frac{h_{k-1} + h_k}{3} [\mu_k - f''(x_k)] \\ &+ \frac{h_k}{6} [\mu_{k+1} - f''(x_{k+1})] = \frac{h_{k-1} + h_k}{6} [\mu_k - f''(x_k)] \\ &+ \frac{h_{k-1}}{6} [\mu_k - f''(x_k) + \mu_{k-1} - f''(x_{k-1})] \\ &+ \frac{h_k}{6} [\mu_k - f''(x_k) + \mu_{k+1} - f''(x_{k+1})]. \end{aligned}$$

Per la (98) l'espressione $\mu_k - f''(x_k) + \mu_i - f''(x_i)$, per $i = k - 1$ e $k + 1$, ha lo stesso segno di $\mu_k - f''(x_k)$, per cui

$$|g_k| \geq \frac{h_{k-1} + h_k}{6} |\mu_k - f''(x_k)|$$

e quindi

$$|\mu_k - f''(x_k)| \leq \frac{6 |g_k|}{h_{k-1} + h_k}. \quad (99)$$

Per la (97) è allora

$$|\mu_k - f''(x_k)| \leq \frac{3}{4} M_4 \frac{h_{k-1}^3 + h_k^3}{h_{k-1} + h_k} = \frac{3}{4} M_4 (h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2) \leq \frac{3}{4} M_4 H^2.$$

Se invece $k = 0$ oppure $k = n$, al posto della (99) si ottiene

$$\begin{aligned} |\mu_0 - f''(x_0)| &\leq \frac{6|g_0|}{h_0}, \\ |\mu_n - f''(x_n)| &\leq \frac{6|g_n|}{h_{n-1}}, \end{aligned}$$

e in entrambi i casi segue la tesi. ■

5.73 Teorema. *Nelle ipotesi del teorema 5.72, indicato con*

$$h = \min_{i=0, \dots, n} h_i,$$

per la spline completa valgono le limitazioni

$$\begin{aligned} |f'''(x) - s_i'''(x)| &\leq 2M_4 \frac{H^2}{h}, \quad \text{per } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1, \\ |f''(x) - s''(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h}, \\ |f'(x) - s'(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^4}{h}, \\ |f(x) - s(x)| &\leq \frac{7}{8} M_4 \frac{H^5}{h}, \quad \text{per } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Dim. Dalla (85) si ha che per $x \in [x_i, x_{i+1}]$ è

$$s_i'''(x) = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h_i},$$

da cui

$$\begin{aligned} s_i'''(x) - f'''(x) &= \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h_i} - f'''(x) \\ &= \frac{[\mu_{i+1} - f''(x_{i+1})] - [\mu_i - f''(x_i)]}{h_i} \\ &\quad + \frac{[f''(x_{i+1}) - f''(x)] - [f''(x_i) - f''(x)]}{h_i} - f'''(x). \end{aligned}$$

Per la formula di Taylor e per la (96) è

$$|s_i'''(x) - f'''(x)| \leq \frac{3}{2h_i} M_4 H^2 + \frac{1}{2h_i} |(x_{i+1} - x)^2 f^{(4)}(\xi_1) - (x_i - x)^2 f^{(4)}(\xi_2)|,$$

con $\xi_1, \xi_2 \in [x_i, x_{i+1}]$, da cui, poiché

$$(x_{i+1} - x)^2 + (x_i - x)^2 \leq (x_{i+1} - x_i)^2 = h_i^2,$$

segue che per $x \in [x_i, x_{i+1}]$ vale

$$|s_i'''(x) - f'''(x)| \leq \frac{3}{2h_i} M_4 H^2 + \frac{1}{2} h_i M_4 \leq 2M_4 \frac{H^2}{h_i}. \quad (100)$$

Per la seconda disuguaglianza, se x coincide con uno dei nodi la maggiorazione discende subito dalla (96); se x non coincide con uno dei nodi, si consideri un indice i tale che

$$|x - x_i| \leq \frac{H}{2}, \quad (101)$$

e tale che non vi siano nodi nell'intervallo di estremi x e x_i . Allora

$$\int_{x_i}^x [s_i'''(t) - f'''(t)] dt = [s_i''(x) - f''(x)] - [s_i''(x_i) - f''(x_i)],$$

da cui

$$s_i''(x) - f''(x) = s_i''(x_i) - f''(x_i) + \int_{x_i}^x [s_i'''(t) - f'''(t)] dt.$$

Tenendo conto della (101), per le (96) e (100) risulta

$$|s_i''(x) - f''(x)| \leq \frac{3}{4} M_4 H^2 + 2M_4 \frac{H^2}{h} \frac{H}{2} \leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h}.$$

Per ricavare la terza disuguaglianza, poiché per $i = 0, \dots, n$, è

$$f(x_i) = s(x_i),$$

per il teorema di Rolle in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, esiste un punto ξ_i , tale che

$$f'(\xi_i) = s'(\xi_i). \quad (102)$$

Quindi per ogni $x \in [a, b]$, esiste uno ξ_i , con

$$|\xi_i - x| \leq H,$$

per cui vale la (102), e quindi

$$\int_{\xi_i}^x [s''(t) - f''(t)] dt = s'(x) - f'(x).$$

Passando ai moduli si ha

$$|s'(x) - f'(x)| \leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h} H = \frac{7}{4} M_4 \frac{H^4}{h}.$$

In modo analogo si ricava la quarta disuguaglianza, tenendo conto che per ogni $x \in [a, b]$ esiste un indice i per cui vale la (101). ■

Dal teorema 5.73 segue che per una funzione $f(x)$ derivabile con continuità fino al quarto ordine, se si infittiscono i nodi in modo regolare, cioè in modo che il rapporto H/h sia sempre limitato, allora si ha convergenza della spline e delle sue derivate fino al terzo ordine rispettivamente alla $f(x)$ e alle sue derivate. In particolare se i nodi rimangono equidistanti, allora $H/h = 1$ e la convergenza è molto rapida, perché

$$|f(x) - s(x)| \leq M_4 H^4.$$

Dalla (95) segue poi che se i nodi vengono infittiti aggiungendo altri nodi alla precedente suddivisione dell'intervallo, la successione degli integrali

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx$$

risulta non decrescente (si veda l'esercizio 5.79) e convergente a

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

Le spline cubiche studiate in questo paragrafo sono quelle più usate. Non esistono comunque difficoltà a una generalizzazione, considerando spline di ordine dispari maggiore di 3 (si veda l'esercizio 5.82).