

## 14. Funzioni spline

A causa del comportamento oscillante dei polinomi di grado elevato spesso non è possibile utilizzare la tecnica dell'interpolazione per approssimare le funzioni. Polinomi di grado più basso si possono ottenere con le tecniche di approssimazione, ma in tal caso nei nodi i valori del polinomio approssimante non sono uguali a quelli della funzione. Se invece l'uguaglianza dei valori nei nodi è fondamentale, come ad esempio nella grafica, si possono utilizzare funzioni che coincidono a tratti con polinomi di grado basso.

L'intervallo  $[a, b]$  viene diviso in  $n$  sottointervalli con  $n + 1$  nodi  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Una funzione  $g(x)$  *polinomiale a tratti* su  $[a, b]$  è una funzione che sull' $i$ -esimo sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  coincide con un polinomio di grado  $k_i$ . Di solito  $k_i = k$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , cioè i polinomi usati nei diversi sottointervalli hanno sempre lo stesso grado  $k$ . La funzione  $g(x)$  viene quindi rappresentata per mezzo di una matrice contenente nell' $i$ -esima riga,  $i = 0, \dots, n - 1$ , i coefficienti

$$a_{i,k}, \quad a_{i,k-1}, \quad \dots \quad a_{i,0}$$

dell' $i$ -esimo polinomio

$$p_i(y) = a_{i,k}y^k + a_{i,k-1}y^{k-1} + \dots + a_{i,0},$$

dove  $y = x - x_i$ , cioè con la variabile traslata rispetto al punto  $x_i$ .

I casi più semplici di funzioni polinomiali a tratti sono i seguenti.

a) Polinomiale *lineare a tratti*: nell' $i$ -esimo sottointervallo la funzione  $g(x)$  coincide con il polinomio di interpolazione della  $f(x)$  sui nodi  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , cioè dall'esempio 5.17

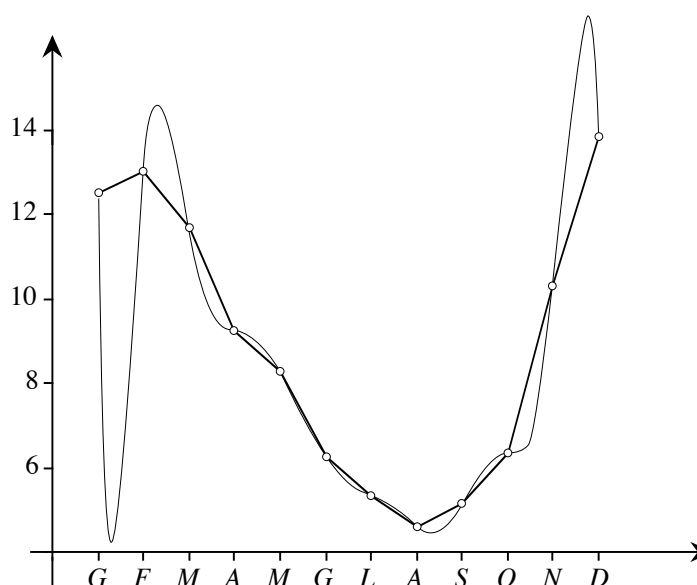
$$p_i(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} (x - x_i) + f(x_i),$$

dove  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ . Per la sua semplicità questo metodo è usato spesso nella pratica. Inoltre se  $f''(x)$  è limitata in  $[a, b]$ , al tendere a zero del massimo degli  $h_i$ , la funzione  $g(x)$  tende alla funzione  $f(x)$ . Però questo metodo non è adatto per una buona rappresentazione grafica della funzione: poiché non vi è alcuna condizione sulle derivate dei due polinomi, nei nodi  $x_i$  il raccordo fra due diversi polinomi lineari presenta in generale un punto angoloso.

**5.67 Esempio.** I seguenti dati si riferiscono alla portata d'acqua di un fiume italiano, misurata mensilmente in  $\text{m}^3/\text{sec}$ .

mese	G	F	M	A	M	G
portata	12.51	13.05	11.7	9.26	8.3	6.25
mese	L	A	S	O	N	D
portata	5.34	4.59	5.14	6.36	10.31	13.88

Nella figura 5.25 sono riportati i grafici della polinomiale lineare a tratti (linea più spessa) e il grafico del polinomio di interpolazione di grado 11 su tutti i punti (linea sottile). Dalla figura risulta che l'andamento del polinomio di interpolazione non rende accettabile l'approssimazione. ■



**Fig. 5.25** - Grafici del polinomiale lineare a tratti e del polinomio di interpolazione.

b) Polinomiale *cubica a tratti di Hermite*: nell' $i$ -esimo sottointervallo la funzione  $g(x)$  coincide con il polinomio di Hermite di grado al più 3 che assume nei punti  $x_i$  e  $x_{i+1}$  gli stessi valori della  $f(x)$  e la cui derivata assume nei punti  $x_i$  e  $x_{i+1}$  gli stessi valori della  $f'(x)$ , cioè dall'esempio 5.13:

$$\begin{aligned}
 p_i(x) &= \frac{1}{h_i^3} \left[ 2(f(x_i) - f(x_{i+1})) + h_i(f'(x_i) + f'(x_{i+1})) \right] y_i^3 \\
 &\quad - \frac{1}{h_i^2} \left[ 3(f(x_i) - f(x_{i+1})) + h_i(2f'(x_i) + f'(x_{i+1})) \right] y_i^2 + f'(x_i) y_i + f(x_i),
 \end{aligned}$$

dove  $y_i = x - x_i$ ,  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . Queste polinomiali forniscono una migliore approssimazione della funzione e quindi consentono una migliore rappresentazione grafica, perché non danno luogo a punti angolosi nei nodi, ma non sono utilizzabili nel caso, frequente nella pratica, in cui i valori di  $f'(x_i)$  non sono noti. Inoltre nei punti di raccordo i polinomi hanno la stessa pendenza, ma non la stessa concavità, per cui nei nodi si può presentare un andamento distorto.

c) Altre polinomiali a tratti possono essere costruite interpolando la  $f(x)$  su più di due punti consecutivi, ad esempio considerando le cubiche che interpolano su quattro nodi. È anche possibile sfruttare altre condizioni che caso per caso possono essere fornite dal problema.

Fra le funzioni polinomiali a tratti quelle più usate nella pratica, anche perché consentono di ottenere ottimi risultati dal punto di vista grafico, sono le polinomiali cubiche ottenute senza utilizzare i valori, in generale non disponibili, delle derivate, e imponendo invece condizioni di continuità delle derivate prima e seconda.

**5.68 Definizione.** Siano  $x_0, \dots, x_n$ ,  $n+1$  punti distinti di  $[a, b]$  tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Una funzione reale  $s(x) \in C^2[a, b]$  viene chiamata *spline cubica* per l'approssimazione della  $f(x)$  se

- a) in ogni sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $s(x)$  coincide con un polinomio di grado al più 3;
- b)  $s(x_i) = f(x_i)$ , per  $i = 0, \dots, n$ . ■

Indicando con  $s_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , il polinomio che coincide con la  $s(x)$  nel sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ , dalla definizione precedente si ottengono le  $4n-2$  condizioni

- a)  $s_i(x_i) = f(x_i)$ ,  $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ,
- b)  $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,
- c)  $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Poiché i coefficienti dei polinomi  $s_i(x)$  sono  $4n$ , occorre imporre due condizioni aggiuntive, che vengono scelte in modo da fornire una buona approssimazione. Vari sono i criteri che possono essere seguiti per individuare queste due condizioni: per esempio

d')  $s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0$ ,

oppure, se sono noti i valori di  $f'(a)$  e  $f'(b)$ ,

d'')  $s'_0(x_0) = f'(a)$ ,  $s'_{n-1}(x_n) = f'(b)$ ,

oppure, se la funzione  $f(x)$  è periodica di periodo  $b - a$ , cioè  $f(a) = f(b)$ ,  
 $d''') \quad s'_0(x_0) = s'_{n-1}(x_n), \quad s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n)$ .

Una spline cubica viene detta *spline naturale* se verifica le condizioni d'),  
*spline completa* se verifica le condizioni d'') e *spline periodica* se verifica le  
 condizioni d''').

Per determinare i coefficienti dei polinomi  $s_i(x)$  si potrebbero sfruttare  
 direttamente le condizioni a) - c) e le condizioni aggiuntive scelte, risolvendo  
 un sistema lineare di  $4n$  equazioni in  $4n$  incognite. È possibile però ridurre il  
 numero delle equazioni necessarie considerando come incognite le quantità,  
 dette *momenti*,

$$\begin{aligned} \mu_i &= s''_i(x_i), \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \mu_n &= s''_{n-1}(x_n). \end{aligned}$$

Infatti, poiché  $s_i(x)$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  è un polinomio di grado al più 3,  
 $s''_i(x)$  è di grado al più 1 e può essere così rappresentata con la formula di  
 Lagrange

$$s''_i(x) = \mu_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} - \mu_i \frac{x - x_{i+1}}{h_i}, \quad (85)$$

dove  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Integrando due volte si ottiene per  $i = 0, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} s'_i(x) &= \mu_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \mu_i \frac{(x - x_{i+1})^2}{2h_i} + \alpha_i, \\ s_i(x) &= \mu_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} - \mu_i \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i, \end{aligned} \quad (86)$$

e le costanti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  vengono determinate imponendo le condizioni a)

$$\begin{cases} \mu_i \frac{h_i^2}{6} + \beta_i = f(x_i) \\ \mu_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + \alpha_i h_i + \beta_i = f(x_{i+1}), \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \beta_i = f(x_i) - \mu_i \frac{h_i^2}{6} \\ \alpha_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6} (\mu_{i+1} - \mu_i). \end{cases}$$

Restano quindi da calcolare i  $\mu_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Dalle (86), imponendo le  
 condizioni b) e sostituendo  $\alpha_{i-1}$  e  $\alpha_i$ , si ottengono le  $n - 1$  relazioni

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{6} \mu_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} \mu_i + \frac{h_i}{6} \mu_{i+1} \\ = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (87)$$

Con le notazioni delle differenze divise (paragrafo 5), si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_{i-1}} &= f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] \\ &= f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}](h_{i-1} + h_i) \end{aligned}$$

e quindi la (87) può essere rappresentata come

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \mu_{i-1} + 2\mu_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \mu_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}],$$

da cui si ottiene

$$\gamma_i \mu_{i-1} + 2\mu_i + \delta_i \mu_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (88)$$

dove  $\gamma_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} > 0, \quad \delta_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} > 0, \quad \gamma_i + \delta_i = 1.$

Altre due relazioni si ottengono tramite le condizioni aggiuntive. Per la spline naturale, dalle d') si ha

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_n = 0. \quad (89)$$

Per la spline completa, dalle d'') si ha:

$$\begin{aligned} s'_0(x_0) &= -\mu_0 \frac{h_0}{3} - \mu_1 \frac{h_0}{6} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} = f'(x_0), \\ s'_{n-1}(x_n) &= \mu_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} + \mu_n \frac{h_{n-1}}{3} + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_{n-1}} = f'(x_n), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{h_0}{3} \mu_0 + \frac{h_0}{6} \mu_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} - f'(x_0) \\ \frac{h_{n-1}}{6} \mu_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} \mu_n = f'(x_n) - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_{n-1}}; \end{cases} \quad (90)$$

con le notazioni delle differenze divise, tenendo conto che per la (28) è

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0), \quad f[x_n, x_n] = f'(x_n),$$

si ha

$$2\mu_0 + \mu_1 = 6f[x_0, x_0, x_1], \quad \mu_{n-1} + 2\mu_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]. \quad (91)$$

Per la spline periodica, dalle  $d'''$ ) si ha:

$$\begin{cases} \frac{h_{n-1} + h_0}{3} \mu_0 + \frac{h_0}{6} \mu_1 + \frac{h_{n-1}}{6} \mu_{n-1} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0} - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}}, \\ \mu_0 = \mu_n, \end{cases}$$

tenendo conto che in questo caso è  $f(x_n) = f(x_0)$ , con l'introduzione del punto  $x_{n+1}$  tale che  $x_{n+1} - x_n = x_1 - x_0$  e  $f(x_{n+1}) = f(x_1)$ , si ha

$$\gamma_n \mu_{n-1} + 2\mu_n + \delta_n \mu_1 = 6f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}], \quad (92)$$

mentre la prima delle (88) può essere scritta

$$2\mu_1 + \delta_1 \mu_2 + \gamma_1 \mu_n = 6f[x_0, x_1, x_2].$$

In ogni caso i  $\mu_0, \dots, \mu_n$  sono soluzione di un sistema lineare, ottenuto associando alle (88) le (89) o le (91) o le (92), a seconda che debbano essere verificate le condizioni  $d'$ ), o  $d''$ ), o  $d'''$ ).

**5.69 Teorema.** Siano  $x_0, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  punti distinti di  $[a, b]$  tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Allora esiste ed è unica la spline cubica che approssima la  $f(x)$  e verifica una delle condizioni  $d'$ ), o  $d''$ ), o  $d'''$ ).

**Dim.** Nel primo caso, tenendo conto che  $\mu_0 = \mu_n = 0$ , il sistema ottenuto dalle (88) è

$$\begin{bmatrix} 2 & \delta_1 & & & & \\ \gamma_2 & 2 & \delta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-2} & 2 & \delta_{n-2} & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso vengono aggiunte una prima e un'ultima equazione al sistema che diventa

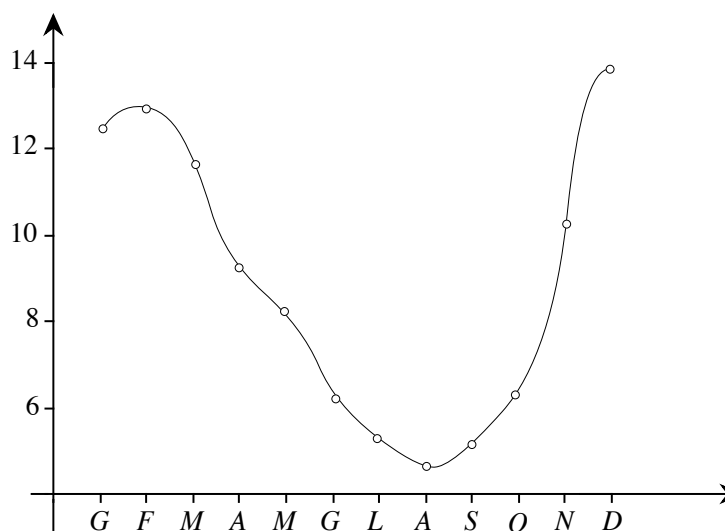
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \gamma_1 & 2 & \delta_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} & \\ & & & 1 & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_n] \end{bmatrix}.$$

Nel terzo caso si ha

$$\begin{bmatrix} 2 & \delta_1 & & & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 2 & \delta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ \delta_n & & & \gamma_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] \end{bmatrix}.$$

Poiché le matrici di questi sistemi hanno predominanza diagonale in senso stretto e quindi sono non singolari, i sistemi hanno una e una sola soluzione [2], che può essere calcolata con il metodo di Gauss senza scambi di righe. Nei primi due casi la matrice è tridiagonale, e quindi il metodo di Gauss ha un basso costo computazionale, dell'ordine di  $n$ . Anche nel terzo caso è possibile ricondurre il problema alla risoluzione di opportuni sistemi lineari con matrice tridiagonale, ad esempio usando la formula di Woodbury. ■

**5.70 Esempio.** Nella figura 5.26 è riportato il grafico della spline cubica naturale che approssima la funzione dell'esempio 5.67. Dal confronto con la figura 5.25 risulta che l'approssimazione ottenuta con le spline è migliore di quelle ottenute con la polinomiale lineare a tratti e con il polinomio di interpolazione. ■



**Fig. 5.26** - Grafico della spline cubica.

Se i punti  $x_i$  sono equidistanti, cioè  $h_i = h$ , per  $i = 0, \dots, n-1$ , la matrice del sistema risulta molto semplice. La (88) infatti si può scrivere,

tenendo conto della (24)

$$\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} = \frac{6}{h^2} \Delta^2 f(x_{i-1}),$$

e quindi per le spline naturali il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} \Delta^2 f(x_0) \\ \Delta^2 f(x_1) \\ \vdots \\ \Delta^2 f(x_{n-3}) \\ \Delta^2 f(x_{n-2}) \end{bmatrix}.$$

Le spline cubiche sono molto usate nella grafica perché fra le funzioni con derivata seconda continua che interpolano la funzione  $f(x)$  nei nodi  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , sono quelle che hanno minima curvatura, cioè che oscillano meno, come risulta dal seguente teorema.

**5.71 Teorema.** *Fra tutte le funzioni  $g(x) \in C^2[a, b]$ , tali che  $g(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , la spline cubica naturale  $s(x)$  è quella che minimizza l'integrale*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx. \quad (93)$$

**Dim.** Si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [g''(x)]^2 dx - 2 \int_a^b [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx - \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (94)$$

Per ogni sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  si ha, integrando due volte per parti,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx &= \left[ [g'(x) - s'(x)]s''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &\quad - \left[ [g(x) - s(x)]s^{(3)}(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g(x) - s(x)]s^{(4)}(x) dx. \end{aligned}$$

Poiché  $s(x)$  sull'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  coincide con un polinomio di grado al più 3, è  $s^{(4)}(x) = 0$ . Inoltre  $s(x_i) = g(x_i)$ ,  $s(x_{i+1}) = g(x_{i+1})$ , per cui

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(x) - s''(x)]s''(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ [g'(x) - s'(x)]s''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \left[ [g'(x) - s'(x)]s''(x) \right]_a^b \end{aligned}$$



e tale espressione è nulla in quanto  $s''(a) = s''(b) = 0$ . Dalla (94) segue che

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2 dx$$

per ogni funzione  $g(x)$  a derivata seconda continua tale che  $g(x_i) = f(x_i)$ . ■

La  $g''(x)$  è legata alla curvatura della funzione  $g(x)$  nel punto  $x$ , definita come il reciproco del raggio del cerchio osculatore in  $x$ , e data dall'espressione

$$c(x) = |g''(x)|(1 + [g'(x)]^2)^{-3/2};$$

l'integrale (93) può allora essere assunto come una misura della *curvatura globale* della funzione  $g(x)$ , se  $|g'(x)|$  è piccolo rispetto ad 1. Dal teorema 5.71 risulta quindi che la spline cubica naturale è quella che minimizza la curvatura globale. Dal teorema 5.71 segue anche che se  $f(x) \in C^2[a, b]$ , allora

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx. \quad (95)$$

A differenza di quanto accade per i polinomi che interpolano la  $f(x)$  su tutto l'intervallo  $[a, b]$ , le funzioni spline convergono alla  $f(x)$  quando si infittiscono i nodi  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Valgono infatti i seguenti teoremi.

**5.72 Teorema.** Sia  $f(x) \in C^4[a, b]$ , con

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|,$$

e sia

$$H = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i.$$

Allora per i momenti della spline cubica  $s(x)$  completa vale la relazione

$$\max_{i=0, \dots, n} |\mu_i - f''(x_i)| \leq \frac{3}{4} M_4 H^2. \quad (96)$$

**Dim.** Dalla formula di Taylor si ha

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} = f'(x_i) + \frac{h_i}{2} f''(x_i) + \frac{h_i^2}{3!} f'''(x_i) + \frac{h_i^3}{4!} f^{(4)}(\xi_{i,1}),$$

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} = f'(x_i) - \frac{h_{i-1}}{2} f''(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{3!} f'''(x_i)$$

$$- \frac{h_{i-1}^3}{4!} f^{(4)}(\xi_{i,2}),$$

$$f''(x_{i-1}) = f''(x_i) - h_{i-1} f'''(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{2} f^{(4)}(\xi_{i,3}),$$

$$f''(x_{i+1}) = f''(x_i) + h_i f'''(x_i) + \frac{h_i^2}{2} f^{(4)}(\xi_{i,4}),$$

in cui  $\xi_{i,j} \in [a, b]$ , per  $j = 1, \dots, 4$ . Posto per  $i = 1, \dots, n-1$

$$g_i = \frac{h_{i-1}}{6} [\mu_{i-1} - f''(x_{i-1})] + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} [\mu_i - f''(x_i)] + \frac{h_i}{6} [\mu_{i+1} - f''(x_{i+1})],$$

sostituendo le relazioni precedenti nella (87) si ha

$$g_i = \frac{h_i^3}{12} \left[ \frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{i,1}) - f^{(4)}(\xi_{i,4}) \right] + \frac{h_{i-1}^3}{12} \left[ \frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{i,2}) - f^{(4)}(\xi_{i,3}) \right].$$

In modo analogo, posto

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{h_0}{3} [\mu_0 - f''(x_0)] + \frac{h_0}{6} [\mu_1 - f''(x_1)], \\ g_n &= \frac{h_{n-1}}{6} [\mu_{n-1} - f''(x_{n-1})] + \frac{h_{n-1}}{3} [\mu_n - f''(x_n)], \end{aligned}$$

dalle (90) si ottiene

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{h_0^3}{12} \left[ \frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{0,1}) - f^{(4)}(\xi_{0,4}) \right], \\ g_n &= \frac{h_{n-1}^3}{12} \left[ \frac{1}{2} f^{(4)}(\xi_{n,2}) - f^{(4)}(\xi_{n,3}) \right]. \end{aligned}$$

Passando ai moduli si ha

$$\begin{aligned} |g_0| &\leq \frac{M_4}{8} h_0^3, \\ |g_i| &\leq \frac{M_4}{8} (h_{i-1}^3 + h_i^3), \text{ per } i = 1, \dots, n-1, \\ |g_n| &\leq \frac{M_4}{8} h_{n-1}^3. \end{aligned} \tag{97}$$

Sia ora  $k$  l'indice per cui

$$|\mu_k - f''(x_k)| = \max_{i=0, \dots, n} |\mu_i - f''(x_i)|. \tag{98}$$

Se  $1 \leq k \leq n-1$ , si ha

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{h_{k-1}}{6} [\mu_{k-1} - f''(x_{k-1})] + \frac{h_{k-1} + h_k}{3} [\mu_k - f''(x_k)] \\ &+ \frac{h_k}{6} [\mu_{k+1} - f''(x_{k+1})] = \frac{h_{k-1} + h_k}{6} [\mu_k - f''(x_k)] \\ &+ \frac{h_{k-1}}{6} [\mu_k - f''(x_k) + \mu_{k-1} - f''(x_{k-1})] \\ &+ \frac{h_k}{6} [\mu_k - f''(x_k) + \mu_{k+1} - f''(x_{k+1})]. \end{aligned}$$

Per la (98) l'espressione  $\mu_k - f''(x_k) + \mu_i - f''(x_i)$ , per  $i = k - 1$  e  $k + 1$ , ha lo stesso segno di  $\mu_k - f''(x_k)$ , per cui

$$|g_k| \geq \frac{h_{k-1} + h_k}{6} |\mu_k - f''(x_k)|$$

e quindi

$$|\mu_k - f''(x_k)| \leq \frac{6 |g_k|}{h_{k-1} + h_k}. \quad (99)$$

Per la (97) è allora

$$|\mu_k - f''(x_k)| \leq \frac{3}{4} M_4 \frac{h_{k-1}^3 + h_k^3}{h_{k-1} + h_k} = \frac{3}{4} M_4 (h_{k-1}^2 - h_{k-1}h_k + h_k^2) \leq \frac{3}{4} M_4 H^2.$$

Se invece  $k = 0$  oppure  $k = n$ , al posto della (99) si ottiene

$$\begin{aligned} |\mu_0 - f''(x_0)| &\leq \frac{6|g_0|}{h_0}, \\ |\mu_n - f''(x_n)| &\leq \frac{6|g_n|}{h_{n-1}}, \end{aligned}$$

e in entrambi i casi segue la tesi. ■

**5.73 Teorema.** *Nelle ipotesi del teorema 5.72, indicato con*

$$h = \min_{i=0, \dots, n} h_i,$$

per la spline completa valgono le limitazioni

$$\begin{aligned} |f'''(x) - s_i'''(x)| &\leq 2M_4 \frac{H^2}{h}, \quad \text{per } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1, \\ |f''(x) - s''(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h}, \\ |f'(x) - s'(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^4}{h}, \\ |f(x) - s(x)| &\leq \frac{7}{8} M_4 \frac{H^5}{h}, \quad \text{per } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

**Dim.** Dalla (85) si ha che per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  è

$$s_i'''(x) = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h_i},$$

da cui

$$\begin{aligned} s_i'''(x) - f'''(x) &= \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h_i} - f'''(x) \\ &= \frac{[\mu_{i+1} - f''(x_{i+1})] - [\mu_i - f''(x_i)]}{h_i} \\ &\quad + \frac{[f''(x_{i+1}) - f''(x)] - [f''(x_i) - f''(x)]}{h_i} - f'''(x). \end{aligned}$$

Per la formula di Taylor e per la (96) è

$$|s_i'''(x) - f'''(x)| \leq \frac{3}{2h_i} M_4 H^2 + \frac{1}{2h_i} |(x_{i+1} - x)^2 f^{(4)}(\xi_1) - (x_i - x)^2 f^{(4)}(\xi_2)|,$$

con  $\xi_1, \xi_2 \in [x_i, x_{i+1}]$ , da cui, poiché

$$(x_{i+1} - x)^2 + (x_i - x)^2 \leq (x_{i+1} - x_i)^2 = h_i^2,$$

segue che per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  vale

$$|s_i'''(x) - f'''(x)| \leq \frac{3}{2h_i} M_4 H^2 + \frac{1}{2} h_i M_4 \leq 2M_4 \frac{H^2}{h_i}. \quad (100)$$

Per la seconda disuguaglianza, se  $x$  coincide con uno dei nodi la maggiorazione discende subito dalla (96); se  $x$  non coincide con uno dei nodi, si consideri un indice  $i$  tale che

$$|x - x_i| \leq \frac{H}{2}, \quad (101)$$

e tale che non vi siano nodi nell'intervallo di estremi  $x$  e  $x_i$ . Allora

$$\int_{x_i}^x [s_i'''(t) - f'''(t)] dt = [s_i''(x) - f''(x)] - [s_i''(x_i) - f''(x_i)],$$

da cui

$$s_i''(x) - f''(x) = s_i''(x_i) - f''(x_i) + \int_{x_i}^x [s_i'''(t) - f'''(t)] dt.$$

Tenendo conto della (101), per le (96) e (100) risulta

$$|s_i''(x) - f''(x)| \leq \frac{3}{4} M_4 H^2 + 2M_4 \frac{H^2}{h} \frac{H}{2} \leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h}.$$

Per ricavare la terza disuguaglianza, poiché per  $i = 0, \dots, n$ , è

$$f(x_i) = s(x_i),$$

per il teorema di Rolle in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , esiste un punto  $\xi_i$ , tale che

$$f'(\xi_i) = s'(\xi_i). \quad (102)$$

Quindi per ogni  $x \in [a, b]$ , esiste uno  $\xi_i$ , con

$$|\xi_i - x| \leq H,$$

per cui vale la (102), e quindi

$$\int_{\xi_i}^x [s''(t) - f''(t)] dt = s'(x) - f'(x).$$

Passando ai moduli si ha

$$|s'(x) - f'(x)| \leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h} H = \frac{7}{4} M_4 \frac{H^4}{h}.$$

In modo analogo si ricava la quarta disuguaglianza, tenendo conto che per ogni  $x \in [a, b]$  esiste un indice  $i$  per cui vale la (101). ■

Dal teorema 5.73 segue che per una funzione  $f(x)$  derivabile con continuità fino al quarto ordine, se si infittiscono i nodi in modo regolare, cioè in modo che il rapporto  $H/h$  sia sempre limitato, allora si ha convergenza della spline e delle sue derivate fino al terzo ordine rispettivamente alla  $f(x)$  e alle sue derivate. In particolare se i nodi rimangono equidistanti, allora  $H/h = 1$  e la convergenza è molto rapida, perché

$$|f(x) - s(x)| \leq M_4 H^4.$$

Dalla (95) segue poi che se i nodi vengono infittiti aggiungendo altri nodi alla precedente suddivisione dell'intervallo, la successione degli integrali

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx$$

risulta non decrescente (si veda l'esercizio 5.79) e convergente a

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

Le spline cubiche studiate in questo paragrafo sono quelle più usate. Non esistono comunque difficoltà a una generalizzazione, considerando spline di ordine dispari maggiore di 3 (si veda l'esercizio 5.82).