Esercitazione di Laboratorio di Matematica Computazionale

13 Maggio 2010

In questa esercitazione si vogliono studiare le caratteristiche della soluzione del problema di deconvoluzione fornite dal metodo di Tikhonov. In particolare si vuole studiare la bontá delle soluzioni fornite al variare del parametro di regolarizzazione.

Supponiamo di conoscere esattamente l'immagine $\mathbf{f}^{(\mathbf{0})}$, la maschera di blur h, e di avere una stima del rumore ω. Si ha

$$\mathbf{g} = K\mathbf{f}^{(\mathbf{0})} + \omega.$$

Si supponga che ω sia un rumore gaussiano bianco con media 0 e varianza $\sigma = 0.01 \max(K\mathbf{f}^{(\mathbf{0})})$.

Ricordiamo che la norma del rumore é $\varepsilon = \|\omega\| = \|K\mathbf{f}^{(\mathbf{0})} - \mathbf{g}\|_2$.

La soluzione di Tikhonov è data dalla soluzione $\mathbf{f}_\mu$ del sistema delle equazioni normali

$$(K^T K + \mu I)\mathbf{f}_\mu = K^T \mathbf{g}.$$

Il parametro μ, detto parametro di regolarizzazione, determina una famiglia di soluzioni che presentano caratteristiche differenti al variare di μ. Se la PSF è normalizzata a 1, si puó scegliere $0 < \mu < 0.1$.

Studiare i seguenti casi:

1. Calcolare e visualizzare $\mathbf{f}^+ = \mathbf{f}_\mu$ per $\mu = 0$ nel caso $\mathbf{g}$ sia affetta da rumore e nel caso ci sia solo "blurring".

2. Calcolare e produrre il grafico dell'energia della soluzione

$$E_\mu = \|\mathbf{f}_\mu\|.$$

3. Calcolare e produrre il grafico, al variare di μ della discrepanza definita dalla:

$$\varepsilon_\mu = \|K\mathbf{f}_\mu - \mathbf{g}\|.$$

4. Calcolare e visualizzare il grafico al variare di μ dell'errore di ricostruzione definito da

$$\mathrm{err}_\mu = \|\mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}^{(\mathbf{0})}\|.$$

   Cosa succede per $\mu \to 0$ e per μ grande?

Occorre determinare all'interno della famiglia delle possibili soluzioni quella "migliore" e quindi risolvere il problema della scelta del parametro di regolarizzazione.

Metodo di scelta del parametro di regolarizzazione:

1. Metodo dell'energia: considerare il valore di μ_1 per il quale $E_{\mu_1} = E$ (con E valore stimato dell'energia della soluzione $\mathbf{f}^{(\mathbf{0})}$, $E = \|\mathbf{f}^{(\mathbf{0})}\|^2$.

2. Metodo della discrepanza: considerare il valore μ_2 per il quale $\varepsilon_{\mu_2} = \varepsilon$.

3. μ_{opt} che minimizza l'errore di riccostreuzione err_μ (è possibile applicare questo metodo solo nel caso di simulazione).

4. Metodo di Miller: considerare il valore di $\mu = \varepsilon^2/E^2$.

5. Confrontare tra loro i vari valori di μ e discutere il risultato.