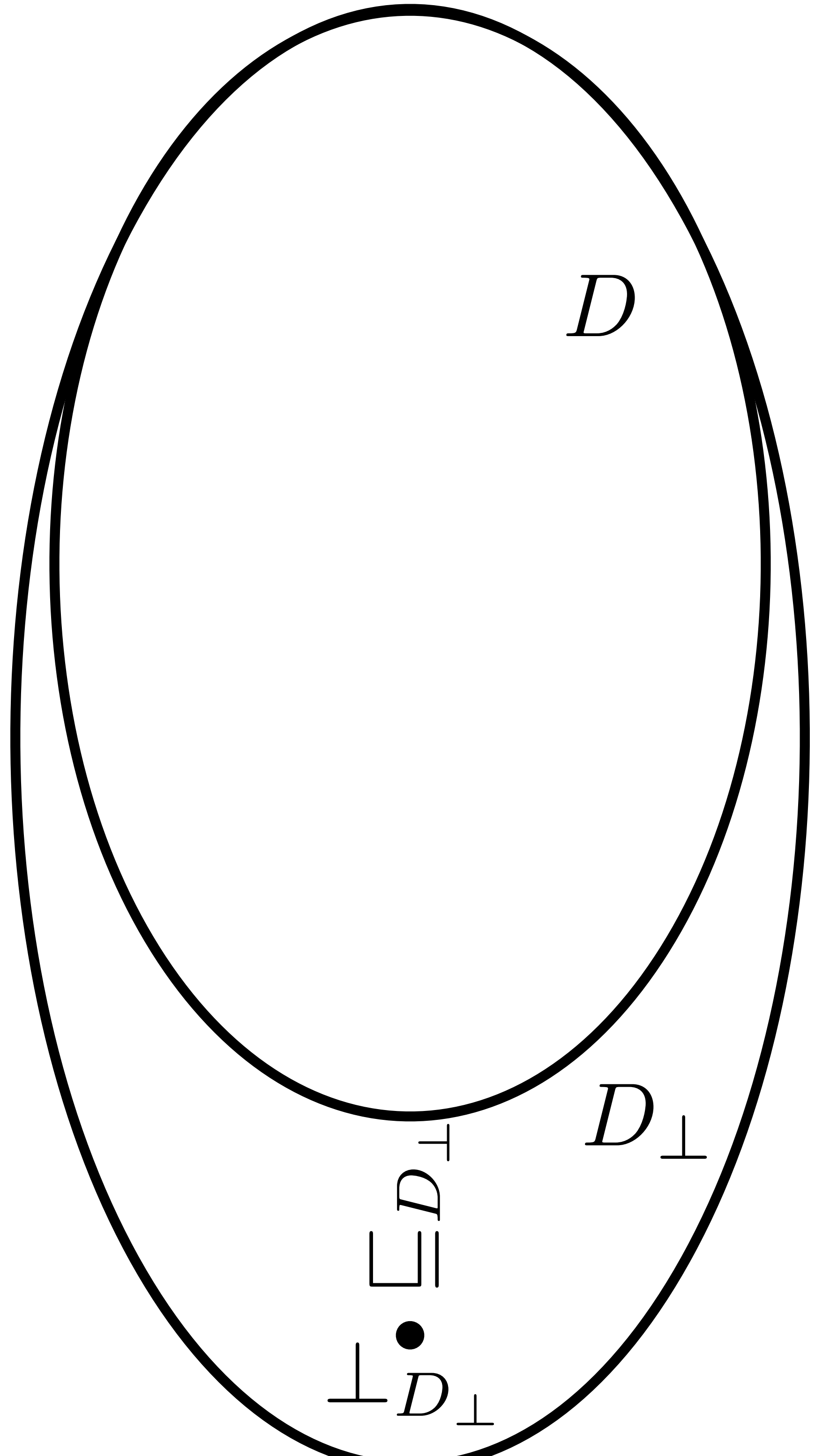
Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Teoremi di continuita' -8.5

Domini arricchiti con bottom

Domini arricchiti con bottom



Domini arricchiti con bottom

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D) \quad \text{CPO} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{D}_\perp = (\ D_\perp\ ,\ \sqsubseteq_{D_\perp}\ )$$

$$\begin{aligned} D_\perp &\triangleq \{\perp\} \ \uplus \ D \\ &= \{(0,\perp)\} \cup (\{1\} \times D) = \{(0,\perp)\} \cup \{(1,d) \mid d \in D\} \end{aligned}$$

$$\perp_{D_\perp} \triangleq (0, \perp)$$

$$\lfloor \cdot \rfloor : D \to D_\perp$$

$$\lfloor d \rfloor \triangleq (1, d)$$

lifting function

come ordiniamo gli elementi liftati?

$$\forall x \in D_\perp.\ \perp_{D_\perp} \sqsubseteq_{D_\perp} x$$

$$\forall d_1, d_2 \in D.\ \lfloor d_1 \rfloor \sqsubseteq_{D_\perp} \lfloor d_2 \rfloor \Leftrightarrow d_1 \sqsubseteq_D d_2$$

Esempio

$(\mathbb{Z}, =)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots \\
 & & \perp_{\mathbb{Z}_\perp} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}_\perp$

Domini arricchiti con bottom

TH. $\mathcal{D}_\perp = (\ D_\perp\ ,\ \sqsubseteq_{D_\perp}\ )\quad \mathrm{CPO}_\perp$

provatelo da soli:
OP,
ha elemento bottom,

per la completezza osservare che: $$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \lfloor d_i \rfloor = \left\lfloor \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i \right\rfloor$$

e' il least upper bound

Domini arricchiti con bottom

$(D, \sqsubseteq_D)$ CPO

$(E, \sqsubseteq_E)$ $\mathrm{CPO}_\perp$

$$(\cdot)^* : [D \to E] \to [D_\perp \to E]$$

$$\forall f \in [D \to E].\ f^*(x) \triangleq \begin{cases} \perp_E & \text{if } x = \perp_{D_\perp} \\ f(d) & \text{if } x = \lfloor d \rfloor \end{cases}$$

perché la definizione sia ben costruita abbiamo bisogno di provare:

$$f \in [D \to E] \quad \Rightarrow \quad f^* \in [D_\perp \to E]$$

f continua implica f^* continua

TH. l'operatore di lifting e' ben definito:
$f \in [D \to E] \quad \Rightarrow \quad f^* \in [D_\perp \to E]$

prova. assumiamo f continua, prendiamo una catena $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D_\perp$

dobbiamo provare $$f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_n \right) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_n)$$

se $\forall n \in \mathbb{N}.\ x_n = \perp_{D_\perp}$ allora è ovvio

altrimenti, consideriamo $k = \min\{i \mid x_i \neq \perp_{D_\perp}\}$

allora $\forall m \geq k.\ \exists d_m \in D.\ x_m = \lfloor d_m \rfloor$

e per l'indipendenza del lub dai prefissi

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_{n+k} \qquad \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_n) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$$

possiamo provare $$f^* \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} x_{n+k} \right) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$$

(continua) $f^*\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} x_{n+k}\right) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^*(x_{n+k})$

$$
\begin{aligned}
f^*\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} x_{n+k}\right) &= f^*\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \lfloor d_{n+k} \rfloor\right) && \text{per def di } k \\
&= f^*\left(\left\lfloor \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} d_{n+k} \right\rfloor\right) && \text{per lub in un dominio liftato} \\
&= f\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} d_{n+k}\right) && \text{per def di lifting} \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f(d_{n+k}) && \text{per continuita' di } f \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^*(\lfloor d_{n+k} \rfloor) && \text{per def di lifting} \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^*(x_{n+k}) && \text{per def di } k
\end{aligned}
$$

TH. L'operatore $(\cdot)^*$ e' monotono

(provatelo)

TH. L'operatore $(\cdot)^*$ e' continuo

prova. prendiamo una catena di funzioni continue $\{f_i : D \to E\}_{i\in\mathbb{N}}$

dobbiamo provare $$\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)^* = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^*$$

consideriamo un generico $x \in D_\perp$

dobbiamo provare $$\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)^* (x) = \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^*\right)(x)$$

se $x = \perp_{D_\perp}$ e' ovvio

se $x = \lfloor d \rfloor$ abbiamo…

(continua) $\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)^* (\lfloor d \rfloor) = \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^*\right)(\lfloor d \rfloor)$

$$\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)^* (\lfloor d \rfloor) = \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right)(d)$$ per def di lifting

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(d)$$ per lub di un dominio funzionale

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^*(\lfloor d \rfloor)$$ per def di lifting

$$= \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^*\right)(\lfloor d \rfloor)$$

per lub in un dominio funzionale

Notazione let (de-lifting)

$(E, \sqsubseteq_E)$ CPO$_\perp$ $\qquad \lambda x.\ e \in [D \to E] \qquad t \in D_\perp$

$$\mathbf{let}\ x \Leftarrow t.\ e \quad \triangleq \quad \underbrace{\underbrace{\underbrace{(\lambda x.\ e)}_{[D \to E]}{}^{*}}_{[D_\perp \to E]}\ \underbrace{t}_{D_\perp}}_{E} \quad = \quad \begin{cases} \perp_E & \text{if } t = \perp_{D_\perp} \\ e[^d/_x] & \text{if } t = \lfloor d \rfloor \end{cases}$$

intuitivamente:

se t e' un valore liftato $\lfloor d \rfloor$ allora de-liftiamo il valore e lo assegniamo a x in e

altrimenti ritorniamo $\perp_E$

Teoremi di continuita’

TH. $(D, \sqsubseteq_D)$ $(E_i, \sqsubseteq_{E_i})$ CPO $\quad f : D \to E_1 \times E_2 \qquad g_i \triangleq \pi_i \circ f$

f e' continua sse g_1, g_2 sono continue

proof. $\Rightarrow)$ f e' continua
π_i e' continua $\Rightarrow$ g_i e' continua

$\Leftarrow)$ notiamo che $\forall d \in D.\ f(d) = (g_1(d), g_2(d))$

assumiamo g_1, g_2 continue

vogliamo provare f continua

consideriamo una catena $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in D

vogliamo provare $f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i)$

(continua) $f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i)$

$$f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) = \left(g_1\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right), g_2\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right)\right)$$ per def g_1, g_2

$$= \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} g_1(d_i), \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} g_2(d_i)\right)$$ g_1, g_2 sono continue

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (g_1(d_i), g_2(d_i))$$ per def di lub delle coppie

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i)$$ per def g_1, g_2

TH. $(D, \sqsubseteq_D)$ $(E, \sqsubseteq_E)$ $(F, \sqsubseteq_F)$ CPO $f : D \times E \to F$

$f_d : E \to F$

$f_d \triangleq \lambda e.\ f(d,e)$

$f_e : D \to F$

$f_e \triangleq \lambda d.\ f(d,e)$

f e' continua sse $\forall d \in D.\ f_d$ sono continue

$\forall e \in E.\ f_e$ sono continue

prova. $\Rightarrow)$ assumiamo f continua

prendiamo un generico $d \in D$

vogliamo provare f_d e' continua

prendiamo una catena $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in E

proviamo $f_d\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} e_i\right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_d(e_i)$

$e \in E$

f_e

(omessa prova)

(continua) $f_d\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} e_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_d(e_i)$

$$f_d\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} e_i\right) = f\left(d, \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} e_i\right)$$ per def di f_d

$$= f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d, \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} e_i\right)$$ per lub della catena costante

$$= f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} (d, e_i)\right)$$ per lub delle coppie

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d, e_i)$$ per continuita' di f

$$= \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_d(e_i)$$ per def di f_d

TH. $(D, \sqsubseteq_D)$ $(E, \sqsubseteq_E)$ $(F, \sqsubseteq_F)$ CPO $f : D \times E \to F$

$f_d : E \to F$
$f_d \triangleq \lambda e.\ f(d, e)$

$f_e : D \to F$
$f_e \triangleq \lambda d.\ f(d, e)$

f e' continua sse $\forall d \in D.\ f_d$ sono continue
$\forall e \in E.\ f_e$ sono continue

prova. $\Leftarrow)$ assumiamo f_d, f_e continue per ogni d, e

vogliamo provare f continua

prendiamo una catena $\{(d_k, e_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \times E$

proviamo $f\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (d_k, e_k)\right) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} f(d_k, e_k)$

(continua) $f\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}(d_k, e_k)\right) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} f(d_k, e_k)$

$$f(\sqcup_k (d_k, e_k)) = f(\sqcup_i d_i, \sqcup_j e_j)$$ per def del lub delle coppie

$$= f_d(\sqcup_j e_j)$$ per def of f_d con $d \triangleq \sqcup_i d_i$

$$= \sqcup_j f_d(e_j)$$ per continuita' di f_d

$$= \sqcup_j f(d, e_j)$$ per def di f_d

$$= \sqcup_j f_{e_j}(d)$$ per def di f_{e_j}

$$= \sqcup_j f_{e_j}(\sqcup_i d_i)$$ per def di $d \triangleq \sqcup_i d_i$

$$= \sqcup_j \sqcup_i f_{e_j}(d_i)$$ per continuita' di f_{e_j}

$$= \sqcup_j \sqcup_i f(d_i, e_j)$$ per def di f_{e_j}

$$= \sqcup_k f(d_k, e_k)$$ per lo switch lemma (applicabile?)

(continua) $f\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}(d_k, e_k)\right) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} f(d_k, e_k)$

se $i \leq n \wedge j \leq m$ allora $f(d_i, e_j) \sqsubseteq f(d_n, e_m)$?

$$\Downarrow$$

$$d_i \sqsubseteq_D d_n \wedge e_j \sqsubseteq_E e_m$$

$$f(d_i, e_j) = f_{d_i}(e_j) \sqsubseteq f_{d_i}(e_m) = f(d_i, e_m) = f_{e_m}(d_i) \sqsubseteq f_{e_m}(d_n) = f(d_n, e_m)$$

f_{d_i} monotona

f_{e_m} monotona

$= \sqcup_j \sqcup_i f(d_i, e_j)$

$= \sqcup_k f(d_k, e_k)$ per lo switch lemma (applicabile?)

Alcune funzioni importanti

Apply

$(D, \sqsubseteq_D)$
$(E, \sqsubseteq_E)$ CPO

$apply : [D \to E] \times D \to E$

$apply(f, d) \triangleq f(d)$

TH. $apply$ e' monotona

(provatelo)

TH. $apply$ e' continua

prova. da un teorema precedente, dimostriamo la continuità su ogni parametro separatamente $apply_f$ $apply_d$

1. per ogni $f \in [D \to E]$ $apply_f \triangleq \lambda d.\ f(d)$ e' continua

2. per ogni $d \in D$ $apply_d \triangleq \lambda f.\ f(d)$ e' continua

1. per ogni $f \in [D \to E]$ $\quad apply_f \triangleq \lambda d.\ f(d)$ e' continua

prendiamo $f \in [D \to E]$ e una catena $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in D

vogliamo provare $\quad apply_f\left(\bigsqcup_i d_i\right) = \bigsqcup_i apply_f(d_i)$

$$
\begin{aligned}
apply_f(\sqcup_i d_i) &= apply(f, \sqcup_i d_i) && \text{per def di } apply_f \\
&= f(\sqcup_i d_i) && \text{per def di } apply \\
&= \sqcup_i f(d_i) && \text{per continuita' di } f \\
&= \sqcup_i apply(f, d_i) && \text{per def di } apply \\
&= \sqcup_i apply_f(d_i) && \text{per def di } apply_f
\end{aligned}
$$

2. per ogni $d \in D$ $\quad apply_d \triangleq \lambda f.\ f(d)$ e' continua

prendiamo $d \in D$ una catena $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $[D \to E]$

vogliamo provare $\quad apply_d \left(\bigsqcup_i f_i \right) = \bigsqcup_i apply_d(f_i)$

$apply_d(\sqcup_i f_i) = apply(\sqcup_i f_i, d)$ per def di $apply_d$

$= (\sqcup_i f_i)(d)$ per def di $apply$

$= \sqcup_i f_i(d)$ per def di lub di funzioni

$= \sqcup_i apply(f_i, d)$ per def di $apply$

$= \sqcup_i apply_d(f_i)$ per def di $apply_d$

Apply: recap

$(D, \sqsubseteq_D)$
$(E, \sqsubseteq_E)$ CPO

$$apply : [D \to E] \times D \to E$$
$$apply(f, d) \triangleq f(d)$$

$$apply \in [[D \to E] \times D \to E]$$

Fix

$(D, \sqsubseteq_D)$ CPO$_\perp$

$$\mathit{fix} : [D \to D] \to D$$
$$\mathit{fix} \triangleq \lambda f.\ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D)$$

TH. fix e' monotona

(provatelo)

TH. fix e' continua

prova. $\mathit{fix} \triangleq \lambda f.\ \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda f.\ f^n(\perp_D)$

per def di lub sui domini funzionali

proviamo che $\forall n.\ \lambda f.\ f^n(\perp_D)$ e' continua

(per induzione matematica su n)

allora fix sara' continua perche' lub di funzioni continue (continua) $\forall n.\ \lambda f.\ f^n(\bot_D)$

caso base: $\lambda f.\ f^0(\bot_D) = \lambda f.\ \bot_D$

e' una funzione costante (continua)

caso induttivo: assumiamo $g \triangleq \lambda f.\ f^n(\bot_D)$ continua

vogliamo provare $h \triangleq \lambda f.\ f^{n+1}(\bot_D)$ e' continua

prendiamo $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $[D \to D]$

vogliamo provare $h\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} h(f_i)$

(continua) $\forall n.\ \lambda f.\ f^n(\bot_D)$ $\quad g \triangleq \lambda f.\ f^n(\bot_D)$ $\quad h \triangleq \lambda f.\ f^{n+1}(\bot_D)$ $\quad h\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} h(f_i)$

$h(\sqcup_i f_i) = (\sqcup_i f_i)^{n+1}(\bot_D)$	per def di h
$= (\sqcup_j f_j)((\sqcup_i f_i)^n(\bot_D))$	per def di $(\cdot)^{n+1}$
$= (\sqcup_j f_j)(g(\sqcup_i f_i))$	per def di g
$= (\sqcup_j f_j)(\sqcup_i g(f_i))$	per ip.ind. (g continua)
$= (\sqcup_j f_j)(\sqcup_i f_i^n(\bot_D))$	per def di g
$= \sqcup_j f_j(\sqcup_i f_i^n(\bot_D))$	per def di lub nel CPO funzionale
$= \sqcup_j \sqcup_i\ f_j(f_i^n(\bot_D))$	per continuita'di f_j
$= \sqcup_k f_k(f_k^n(\bot_D))$	per switch lemma
$= \sqcup_k f_k^{n+1}(\bot_D)$	per def di $(\cdot)^{n+1}$
$= \sqcup_k h(f_k)$	per def di h

Fix: recap

$$(D, \sqsubseteq_D) \ \mathrm{CPO}_\perp$$

$$\mathit{fix} : [D \to D] \to D$$
$$\mathit{fix} \triangleq \lambda f. \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp_D)$$

$$\mathit{fix} \in [[D \to D] \to D]$$

Curry

$(D, \sqsubseteq_D)$

$(E, \sqsubseteq_E)$ CPO

$(F, \sqsubseteq_F)$

$$curry : (D \times E \to F) \to D \to E \to F$$

$$curry\ f\ d\ e \triangleq f(d, e)$$

TH. f continua $\Rightarrow$ $curry(f)$ continua

(provatelo)

Uncurry

$(D, \sqsubseteq_D)$

$(E, \sqsubseteq_E)$ CPO

$(F, \sqsubseteq_F)$

$$uncurry : (D \to E \to F) \to (D \times E) \to F$$

$$uncurry\ f\ (d, e) \triangleq f\ d\ e$$

TH. f continua $\Rightarrow$ $uncurry(f)$ continua

(provatelo)

TH. $uncurry$ e' l'inversa di $curry$

(provatelo)

Unione disgiunta (da consegnare)

$$\mathcal{D} = (D, \sqsubseteq_D) \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad$$
$$\mathcal{E} = (E, \sqsubseteq_E) \quad \mathrm{CPO}_\perp \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} + \mathcal{E} = (\ D \uplus E\ ,\ \sqsubseteq_{D \uplus E}\ )$$

$$D \uplus E \triangleq \{(0, d) \mid d \in D\} \cup \{(1, e) \mid e \in E\}$$

come ordinare gli elementi?

c'è l'elemento bottom?

è un ordine completo?

come definire ingezioni continue?

$$\iota_D : D \to D \uplus E$$
$$\iota_E : E \to D \uplus E$$