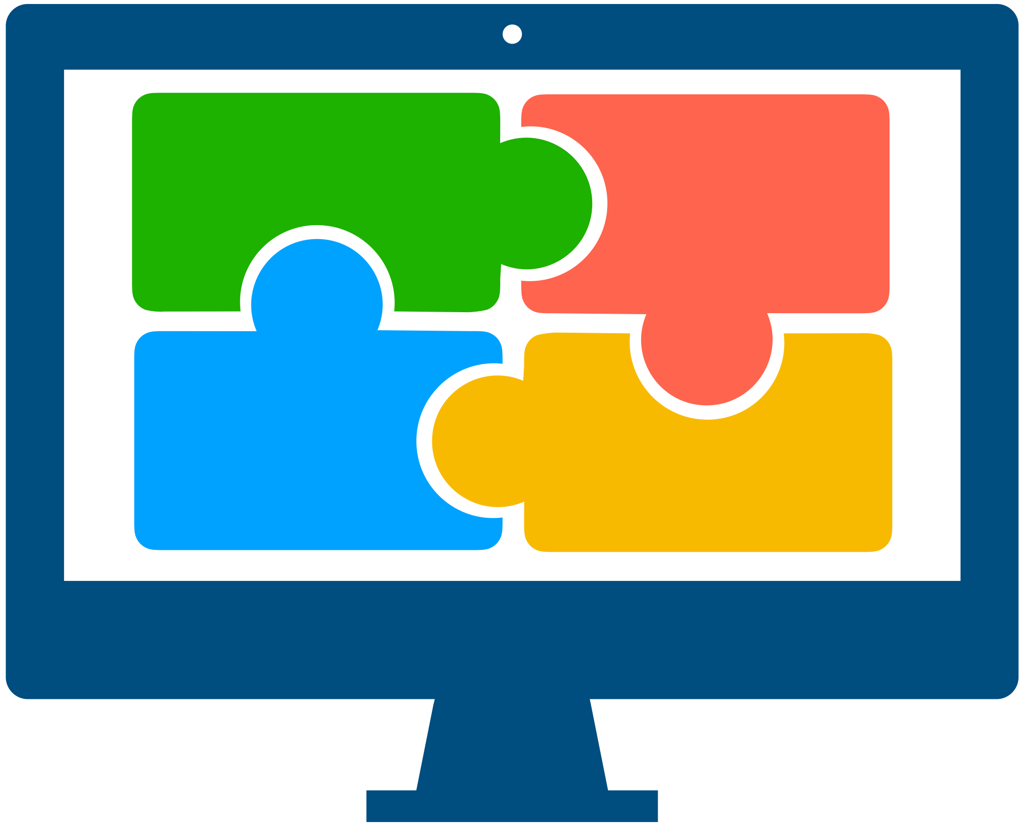


Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

5.1 - Ordini parziali completi

Ordini parziali

Insieme parzialmente ordinati

un insieme

una relazione binaria

$(P, \sqsubseteq)$ $\qquad$ $\sqsubseteq \; \subseteq P \times P$

riflessiva	$\forall p \in P.$	$p \sqsubseteq p$
antisimmetrica	$\forall p, q \in P.$	$p \sqsubseteq q \;\wedge\; q \sqsubseteq p \;\Rightarrow\; p = q$
transitiva	$\forall p, q, r \in P.$	$p \sqsubseteq q \;\wedge\; q \sqsubseteq r \;\Rightarrow\; p \sqsubseteq r$

$$\begin{array}{c} q \\ \uparrow \\ p \end{array}$$

$p \sqsubseteq q$ significa che p e q sono **confrontabili** e che p e' minore (o uguale) di q

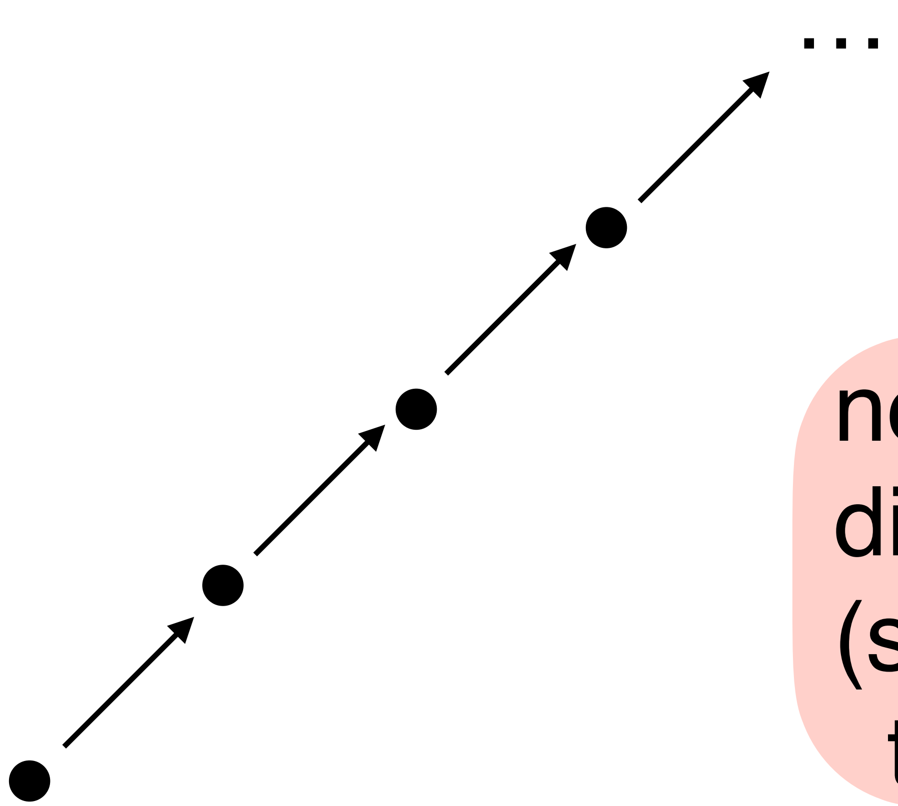
$p \sqsubset q$ significa $p \sqsubseteq q \;\wedge\; p \neq q$

Ordini totali

$(P, \sqsubseteq)$ OP

totale $\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \ \vee \ q \sqsubseteq p$

un OP dove ogni due elementi sono **confrontabili**



notazione con diagramma di Hasse (si omettono gli archi transitivi e riflessivi)

Ordini discreti

$(P, \sqsubseteq)$ OP

discreto $\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p = q$

ogni elemento e' **confrontabile** solo con se stesso

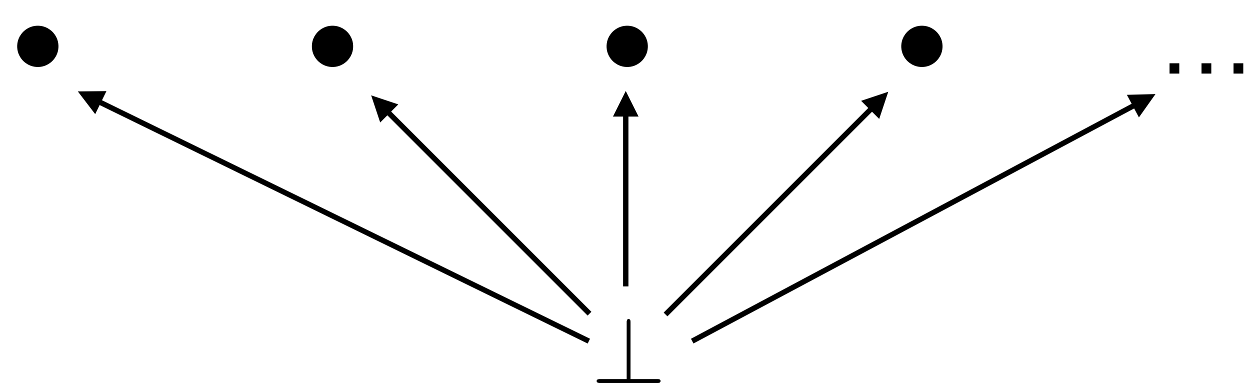
$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \ldots$

Ordini piatti

$(P, \sqsubseteq)$ OP

piatto $\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \;\Leftrightarrow\; p = q \;\vee\; p = \bot$

ogni elemento e' **confrontabile** solo con se stesso e con un elemento (piu' piccolo) particolare $\bot$



Esercizio

$(\mathbb{N}, \leq)$

PO?	Total?	Discrete?	Flat?
✓	✓	✗	✗

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \\
3 \arrow[u] \\
2 \arrow[u] \\
1 \arrow[u] \\
0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Esercizio

$(\wp(S), \subseteq)$

	OP?	Totale?	Discreto?	Piatto?
	✓	$\lvert S\rvert < 2$	$S = \emptyset$	$\lvert S\rvert < 2$

esempio: $S = \{a, b, c\}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{a,b,c\} & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$\{a,b\} \quad \substack{\not\subseteq \\ \not\supseteq} \quad \{b,c\}$$

$$\{a\} \quad \substack{\not\subseteq \\ \not\supseteq} \quad \{b\}$$

Esercizio

$(\mathbb{N}, =)$

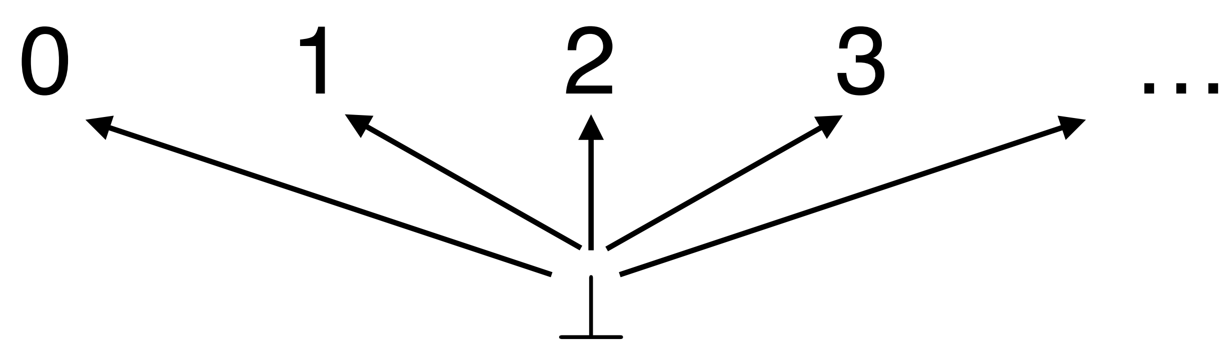
OP?	Totale?	Discreto?	Piatto?
✓	✗	✓	✗

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$

Esercizio

$$(\mathbb{N} \cup \{\perp\}, \{(\perp, n) \mid n \in \mathbb{N}\}^*)$$

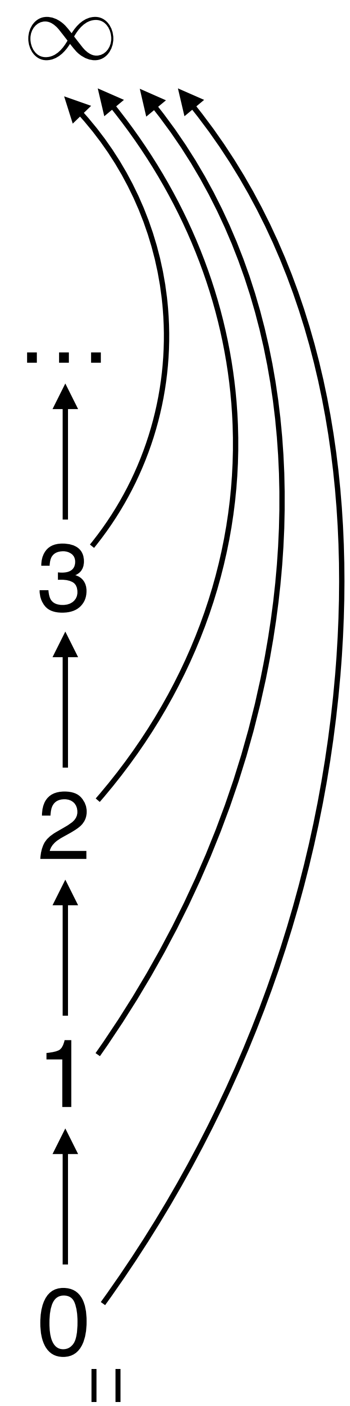
OP?	Totale?	Discreto?	Flat?
✓	✗	✗	✓



Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

OP?	Totale?	Discreto?	Piatto?
✓	✓	✗	✗



Esercizio

	OP?	Totale?	Discreto?	Piatto?
$(\mathbb{N}, <)$	✗	✗	✗	✗
$(\mathbb{Z}, \leq)$	✓	✓	✗	✗
$(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$	✓	✓	✗	✗
$(T_\Sigma, \prec)$	✗	✗	✗	✗
$(\mathbb{N}, \neq)$	✗	✗	✗	✗

Sottoinsiemi di un OP

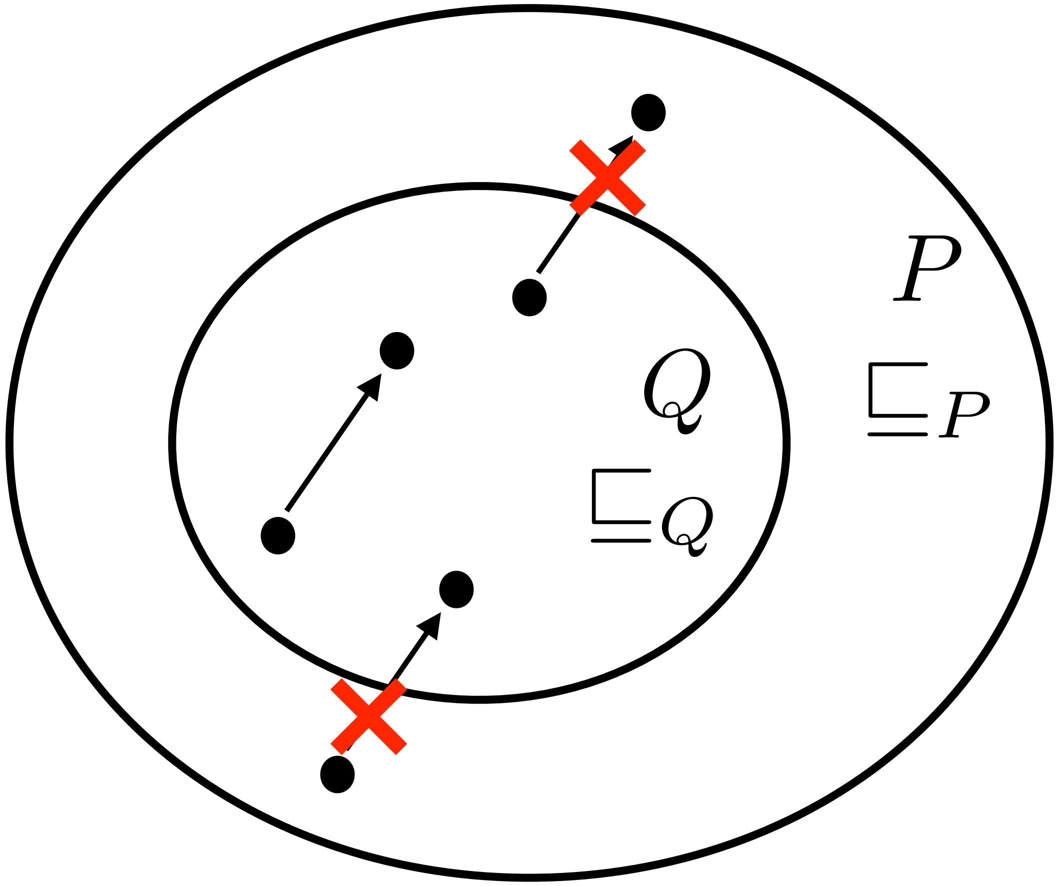
$(P, \sqsubseteq_P)$ OP $\qquad Q \subseteq P$

consideriamo

$$\sqsubseteq_Q \triangleq \sqsubseteq_P \cap (Q \times Q)$$

TH. $(Q, \sqsubseteq_Q)$ e' un OP

TH. se $(P, \sqsubseteq_P)$ e' totale, allora $(Q, \sqsubseteq_Q)$ e' totale



OP $\sqsubseteq$	b.f. $\prec$
reflessivo	non reflessivo (altrimenti cicla!)
antisimmetrico	antisimmetrico (altrimenti cicla!) $p \prec q \wedge q \prec p$ e' sempre falso
transitivo	puo' essere transitivo ($\prec^+$ b.f.)
ha catene ascendenti infinite (se non vuoto)	non ha catene ascendenti infinite
$\sqsubset$ puo' essere b.f.	$\prec^*$ e' sempre un OP

Proprieta’

Elemento minimo

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\quad Q \subseteq P \quad \ell \in Q$

ℓ e' il minimo element di Q se $\forall q \in Q.\ \ell \sqsubseteq q$

TH. (unicita' dell' elemento minimo)

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$ ℓ_1, ℓ_2 elementi minimi di Q implica $\ell_1 = \ell_2$

$$\left.\begin{array}{lll} \ell_1 \text{ minimo elemento di } Q & \Rightarrow & \ell_1 \sqsubseteq \ell_2 \\ \ell_2 \text{ minimo elemento di } Q & \Rightarrow & \ell_2 \sqsubseteq \ell_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

per antisimmetria

Bottom

$(P, \sqsubseteq)$ OP

e' il minimo elemento di P
(se esiste) e' chiamato bottom e denotato $\perp$

talvolta scritto $\perp_P$

Esempi

OP	bottom?
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$	0
$(\wp(S), \subseteq)$	$\varnothing$
$(\mathbb{Z}, \leq)$	

Elemento minimale

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$ $m \in Q$

m e' un elemento minimale di Q se $\forall q \in Q. \quad q \sqsubseteq m \Rightarrow q = m$

(m piu' piccolo elemento che puo' essere trovato in Q)

minimo $\forall q \in Q. \quad \ell \sqsubseteq q$	minimale $\forall q \in Q. \quad q \sqsubseteq m \Rightarrow q = m$
unico	no necessariamente unico
minimale	no necessariamente minimo puo' essere minimo

Ordine inverso

TH. $(P, \sqsubseteq)$ OP implica $(P, \sqsupseteq)$ OP

nota:
$\sqsupseteq \; = \; \sqsubseteq^{-1}$

prova. E' immediato controllare che $\sqsupseteq$

e' riflessiva
e' antisimmetrica
e' transitiva

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\quad Q \subseteq P$

elemento massimo: elemento minimo di Q w.r.t. $(P, \sqsupseteq)$

elemento top: $\top$ il piu' grande element di P (se esiste)

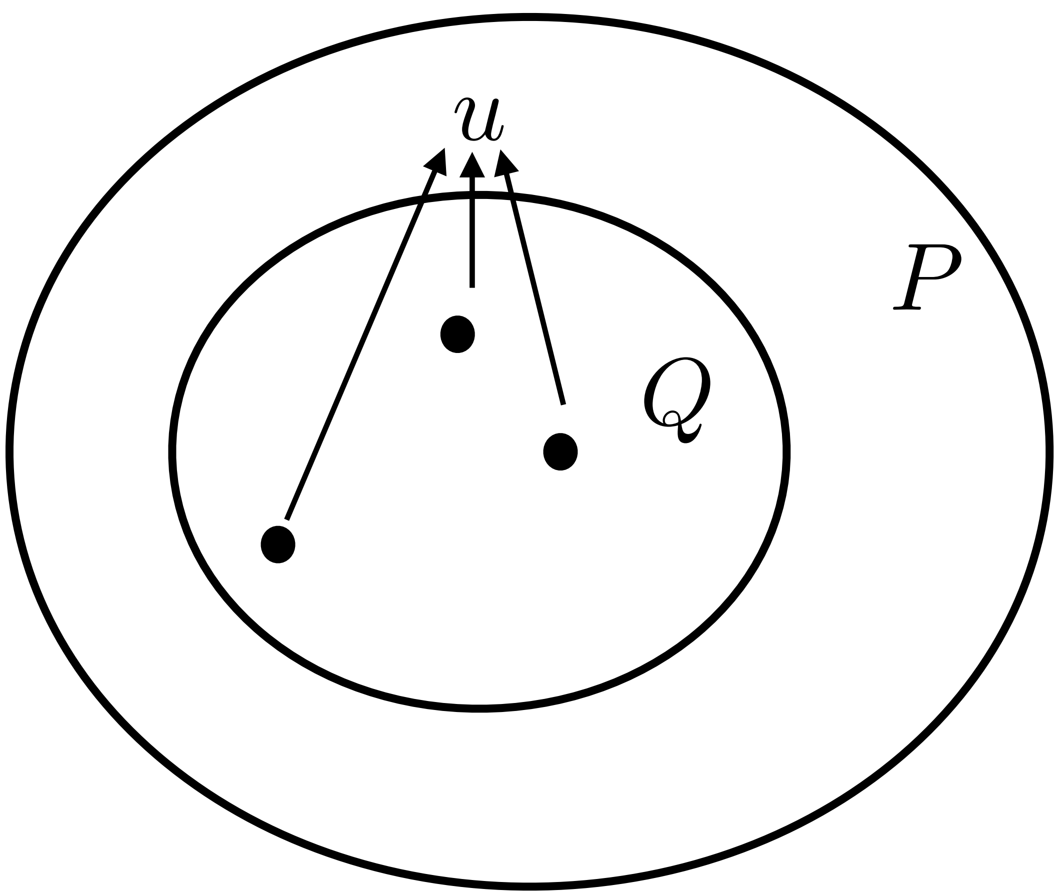
maximal element: minimal element of Q w.r.t. $(P, \sqsupseteq)$

Upper bound

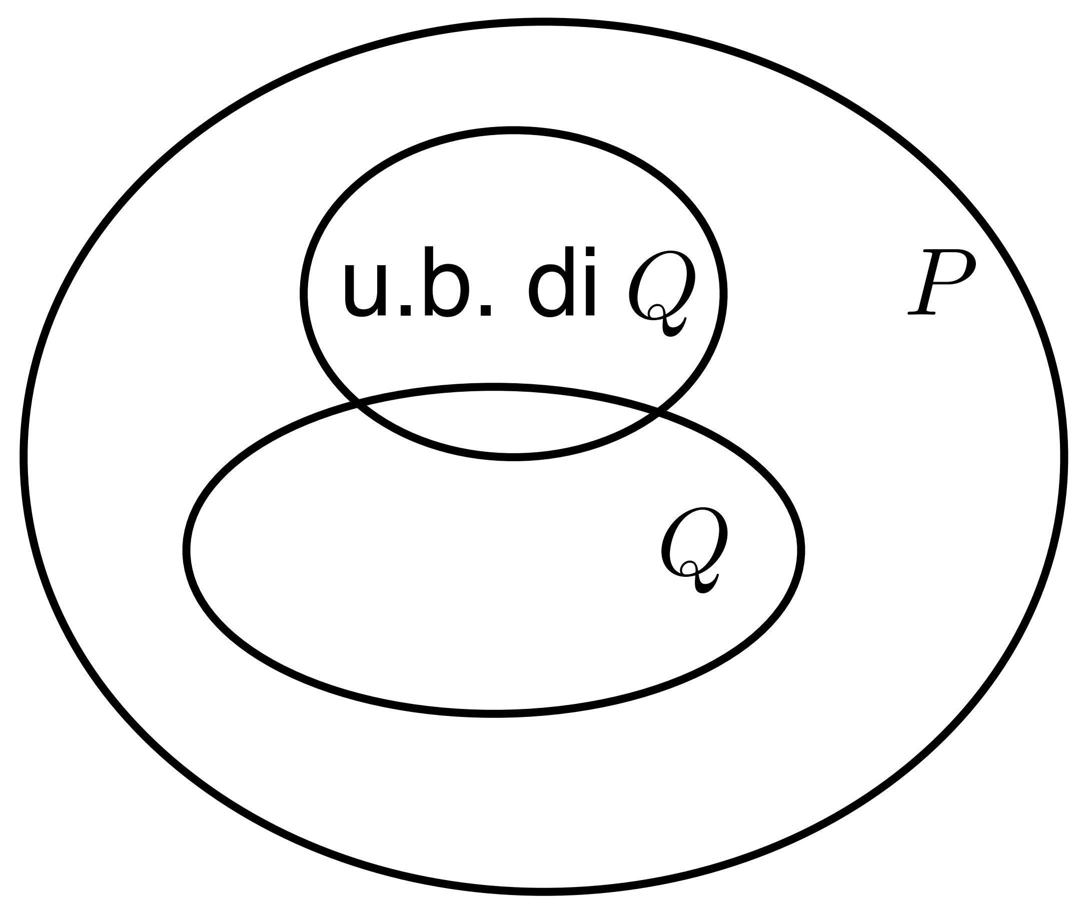
$(P, \sqsubseteq)$ OP $\quad Q \subseteq P \quad u \in P$

u e' un upper bound di Q se $\forall q \in Q. \quad q \sqsubseteq u$

(tutti gli elementi di Q sono piu' piccoli di u)



Q puo' avere tanti upper bound



Minimo upper bound

$(P, \sqsubseteq)$ PO $\quad Q \subseteq P \quad p \in P$

p e' un **minimo upper bound** (lub) of Q if

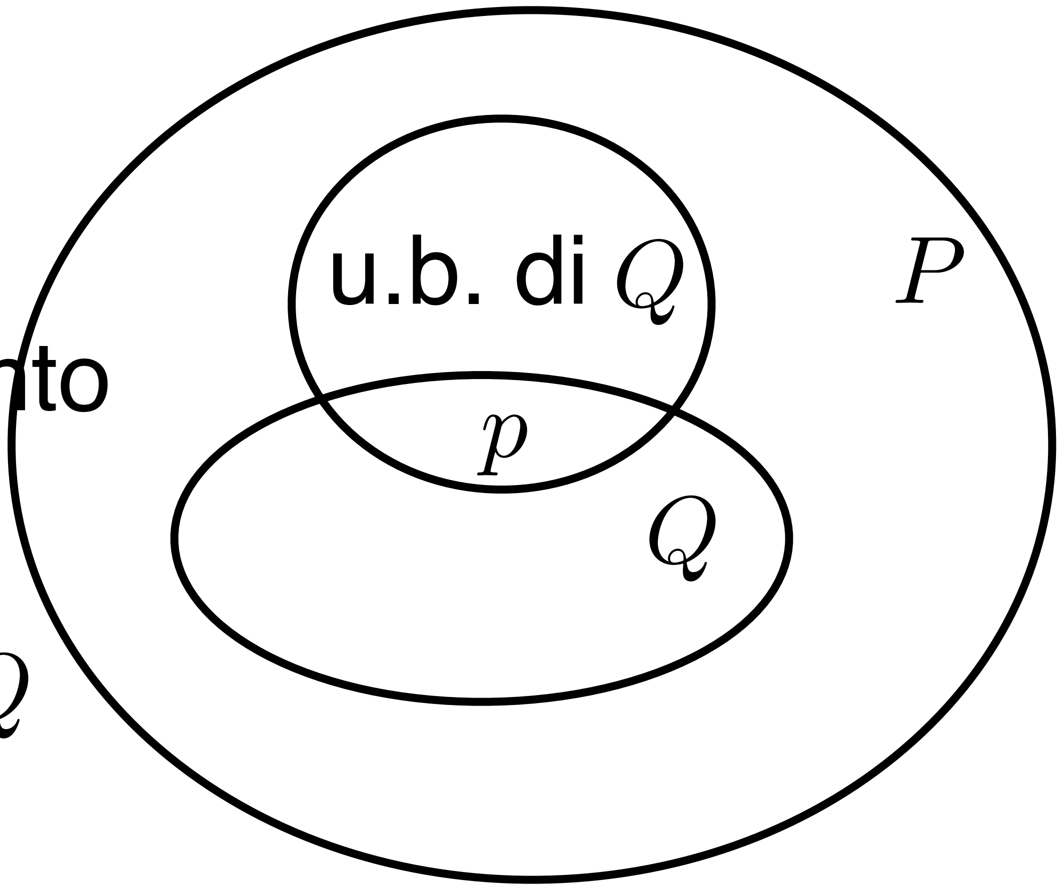
1. se e' un upper bound di Q $\quad \forall q \in Q. \quad q \sqsubseteq p$
2. se e' piu' piccolo di ogni altro upper bound di Q

$$\forall u \in P. \quad (\forall q \in Q. q \sqsubseteq u) \Rightarrow p \sqsubseteq u$$

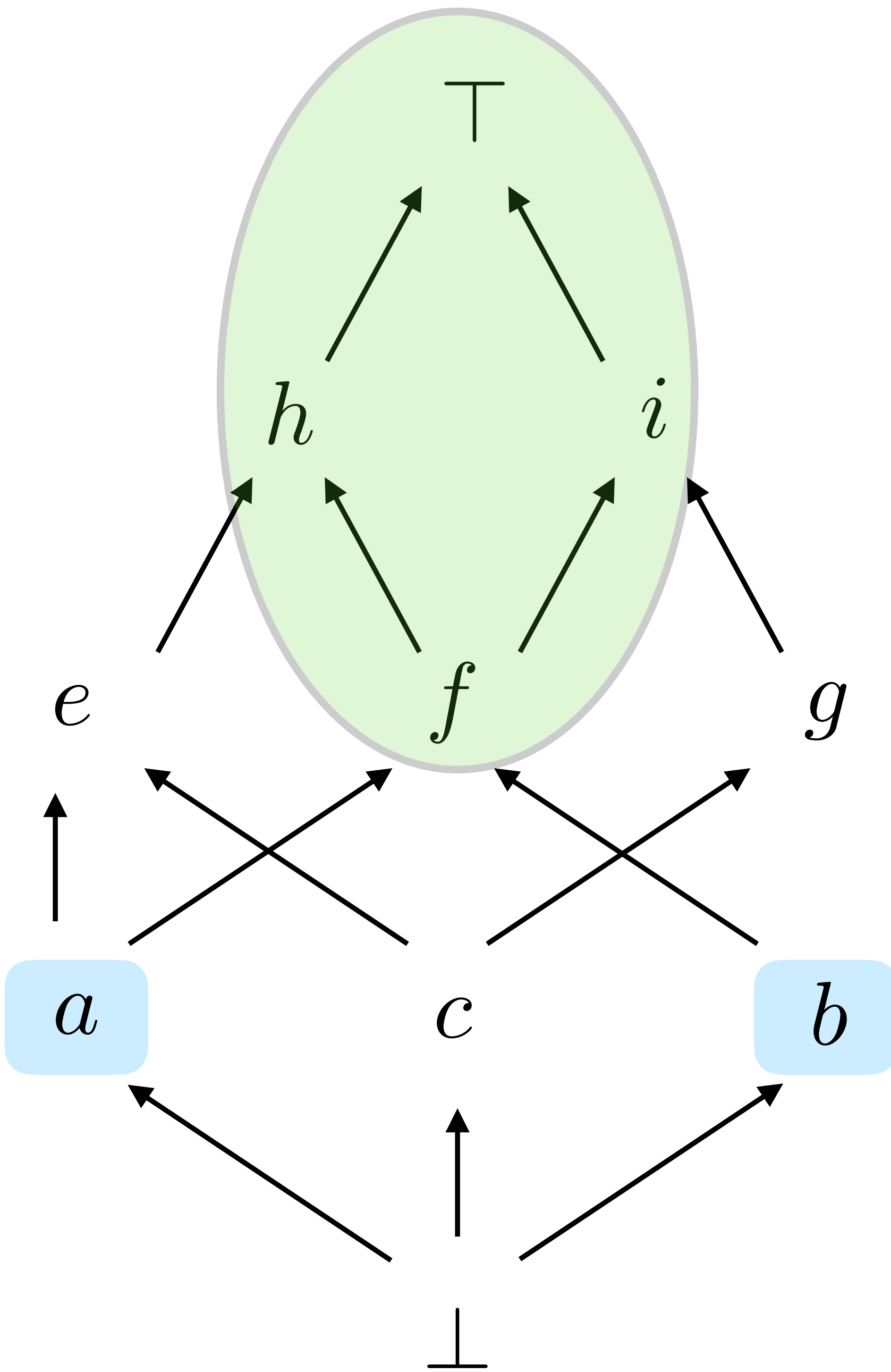
scriviamo $p = lub\ Q$

intuitivamente, e' il minimo elemento che rappresenta tutti quelli di Q

p non e' necessariamente un elemento di Q



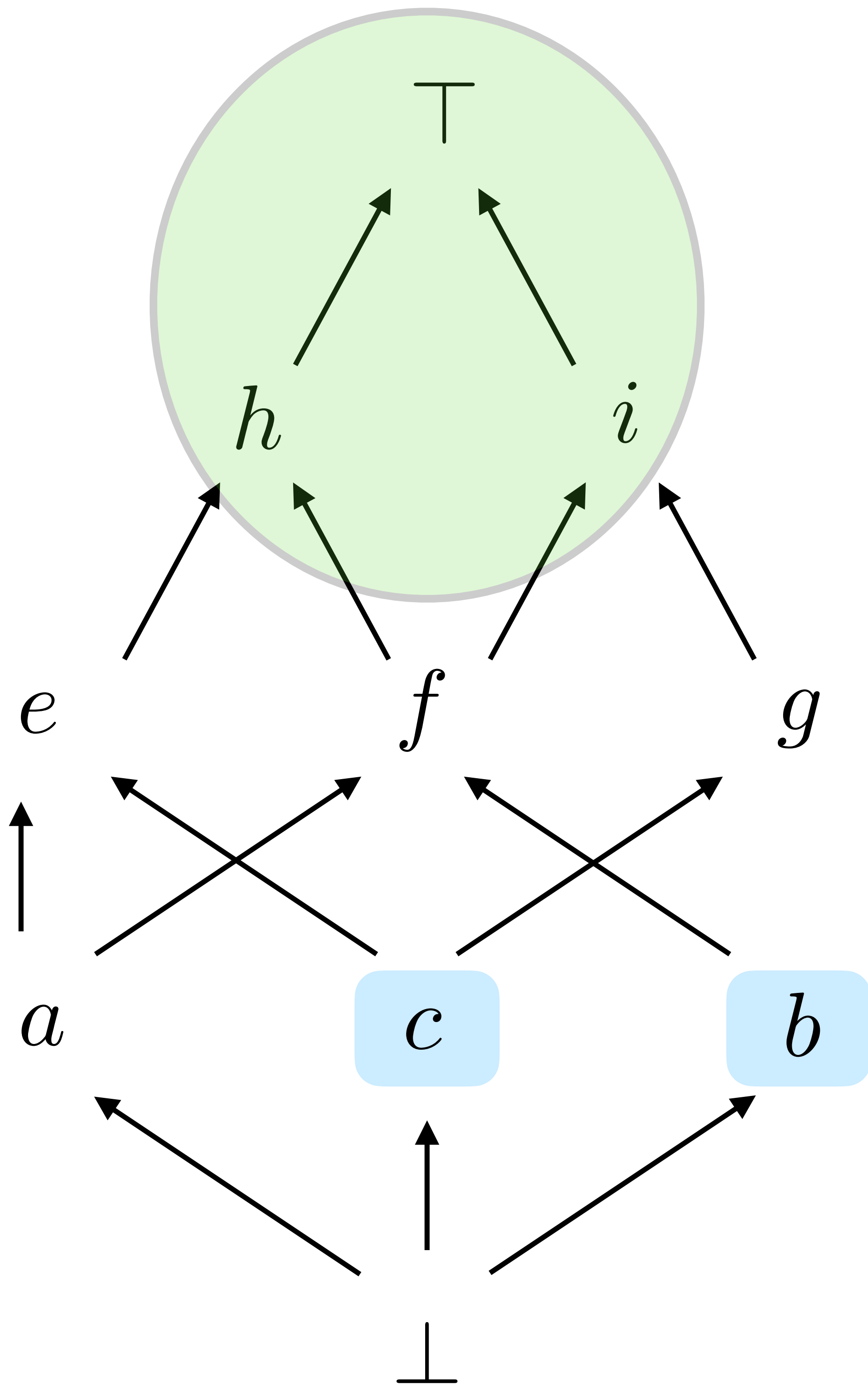
Esercizio



Upper bound di $\{a, b\}$? $\{f, h, i, \top\}$

lub? f

Esercizio



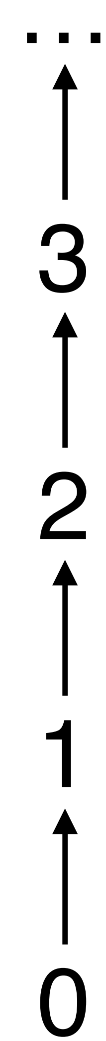
Upper bounds of $\{b, c\}$? $\{h, i, \top\}$

lub? no lub!

Esercizio

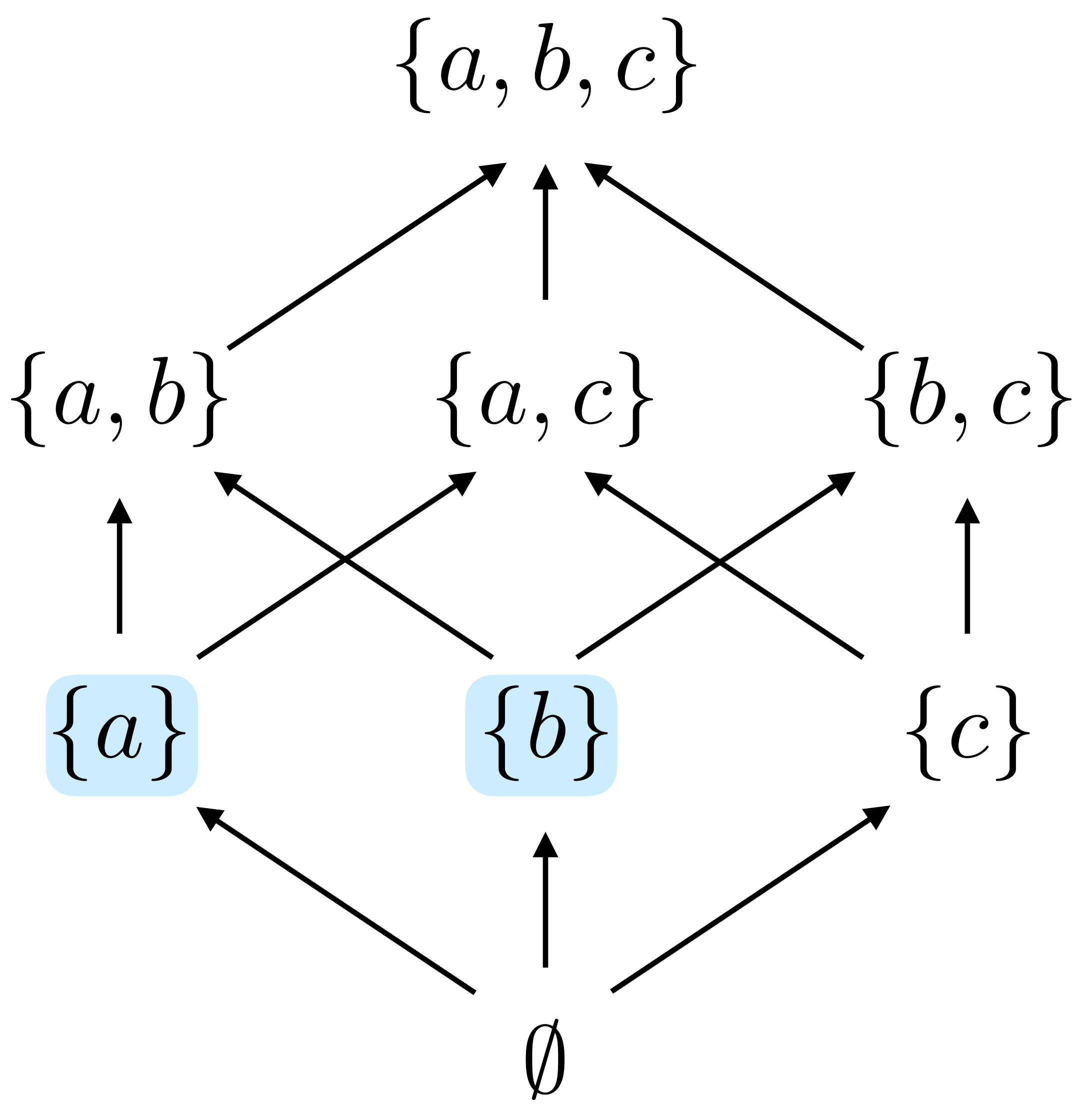
$(\mathbb{N}, \leq)$ $Q \subseteq \mathbb{N}$ lub? se Q finito $lub\ Q = \max Q$

altrimenti no lub



Esercizio

$(\wp(S), \subseteq)$ $\quad Q \subseteq \wp(S)$ $\quad$ lub? $\qquad lub\ Q = \bigcup_{T \in Q} T$



$$lub\ \{\{a\}, \{b\}\} = \{a, b\}$$

Ordini parziali completi (CPO)

Completezza: l'idea

D un dominio

$\sqsubseteq$ un modo per confrontare gli elementi

PO

$x \sqsubseteq y$ x e' un' (meno precisa) approssimazione di y

x e y sono consistenti,
ma y e' piu' accurata di x

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \cdots$$

(n+1)esima approssimazione

terza approssimazione

seconda approssimazione

prima approssimazione

ogni sequenza di approssimazioni tende ad un limite?

Catene

$(P, \sqsubseteq)$ PO $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e' una catena se $\forall i \in \mathbb{N}.\ d_i \sqsubseteq d_{i+1}$

$$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq d_n \sqsubseteq \cdots$$

ogni catena e' una lista infinita

catena finita: ci sono solo un numero finito di elementi distinti

$$\exists k \in \mathbb{N}.\ \forall i \geq k.\ d_i = d_{i+1}$$

o equivalentemente

$$\exists k \in \mathbb{N}.\ \forall i \geq k.\ d_i = d_k$$

Esempio

$(\mathbb{N}, \leq)$

$0 \leq 2 \leq 4 \leq \cdots \leq 2n \leq \cdots$ e' una catena infinita

$0 \leq 1 \leq 3 \leq 3 \leq 5 \leq \cdots \leq 5 \leq \cdots$ e' una catena finita

ogni catena ha una lunghezza infinita

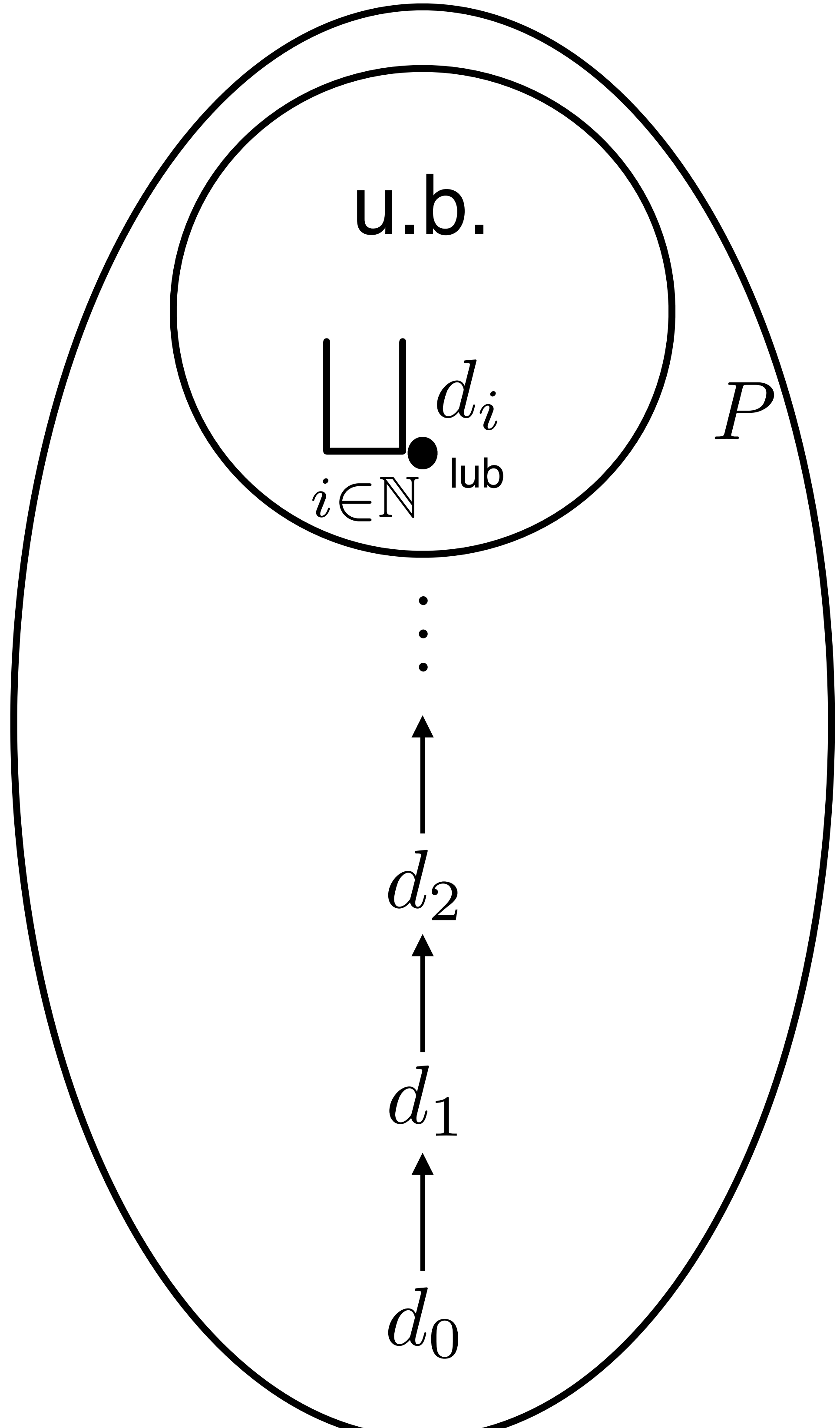
Limite di una catena

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una catena

denotiamo con $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i$ il lub di $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se esiste

e lo chiamiamo il limite della catena

Limite



Esempio

$(\mathbb{N}, \leq)$

$$0 \leq 2 \leq 4 \leq \cdots \leq 2n \leq \cdots$$

non ha lub
(l'insieme degli upper bound e' vuoto)

$$0 \leq 1 \leq 3 \leq 3 \leq 5 \leq \cdots \leq 5 \leq \cdots$$

ha lub 5
(quali upper bound?)

Lemma su catene finite

Lemma (ogni catena finita ha un limite)

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una catena finita $\Rightarrow$ $\displaystyle\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i$ esiste

prova.

$\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ finita $\Rightarrow$ $\exists k.\ \forall i.\ d_{i+k} = d_k$

gli elementi della catena sono ordinati totalmente

d_k e' il piu' grande elemento della catena

d_k e' un upper bound $\forall i.\ d_i \sqsubseteq d_k$

d_k e' il minimo upper bound

prendiamo u tale che $\forall i.\ d_i \sqsubseteq u$ allora $d_k \sqsubseteq u$

Indipendenza dei prefissi

Lemma (indipendenza dei prefissi) $(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena

se $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$ esiste $\Rightarrow \forall k. \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_{i+k} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$

$$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq d_k \sqsubseteq d_{k+1} \sqsubseteq \cdots \qquad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$$

$$=$$

$$d_k \sqsubseteq d_{k+1} \sqsubseteq \cdots \qquad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_{i+k}$$

Indipendenza dei prefissi

Lemma (indipendenza dei prefissi) $(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una catena

se $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i$ esiste $\Rightarrow \forall k.\ \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_{i+k} = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i$

prova.

prendiamo generico k

proviamo che $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{d_{i+k}\}_{i\in\mathbb{N}}$ hanno lo stesso u.b.

(e quindi lo stesso lub)

1. se u e' un u.b. di $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ allora e' un u.b. di $\{d_{i+k}\}_{i\in\mathbb{N}}$

   perche' $\{d_{i+k}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

2. se u e' un u.b. di $\{d_{i+k}\}_{i\in\mathbb{N}}$ mostriamo che $\forall j.\ d_j \sqsubseteq u$

   per $j \geq k$ e' ovvio

   se $j < k$, $d_j \sqsubseteq d_k \sqsubseteq u$ perche' $d_k \in \{d_{i+k}\}_{i\in\mathbb{N}}$

Ordini parziali completi

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\quad P$ e' completo se ogni catena ha un limite (lub)

TH. Qualsiasi catena finita ha un limite
(l'ultimo elemento della sequenza)

Se P ha solo catene finite è completo

Se P è finito è completo

Qualsiasi ordine discreto è completo

Qualsiasi ordine piatto è completo

Esempio

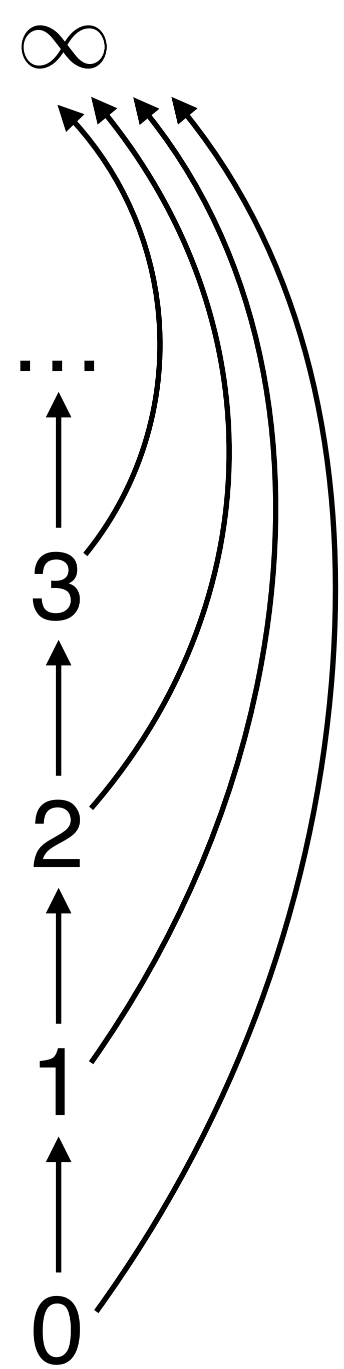
$(\mathbb{N}, \leq)$ non è completo
(è sufficiente esporre una catena senza limite)

$0 \leq 2 \leq 4 \leq \cdots \leq 2n \leq \cdots$ non ha lub
(l'insieme dei u.b. e' vuoto)

Esercizo

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

completo?



ogni catena infinita ha limite ∞
(insieme u.b. = $\{\infty\}$)

Esercizio

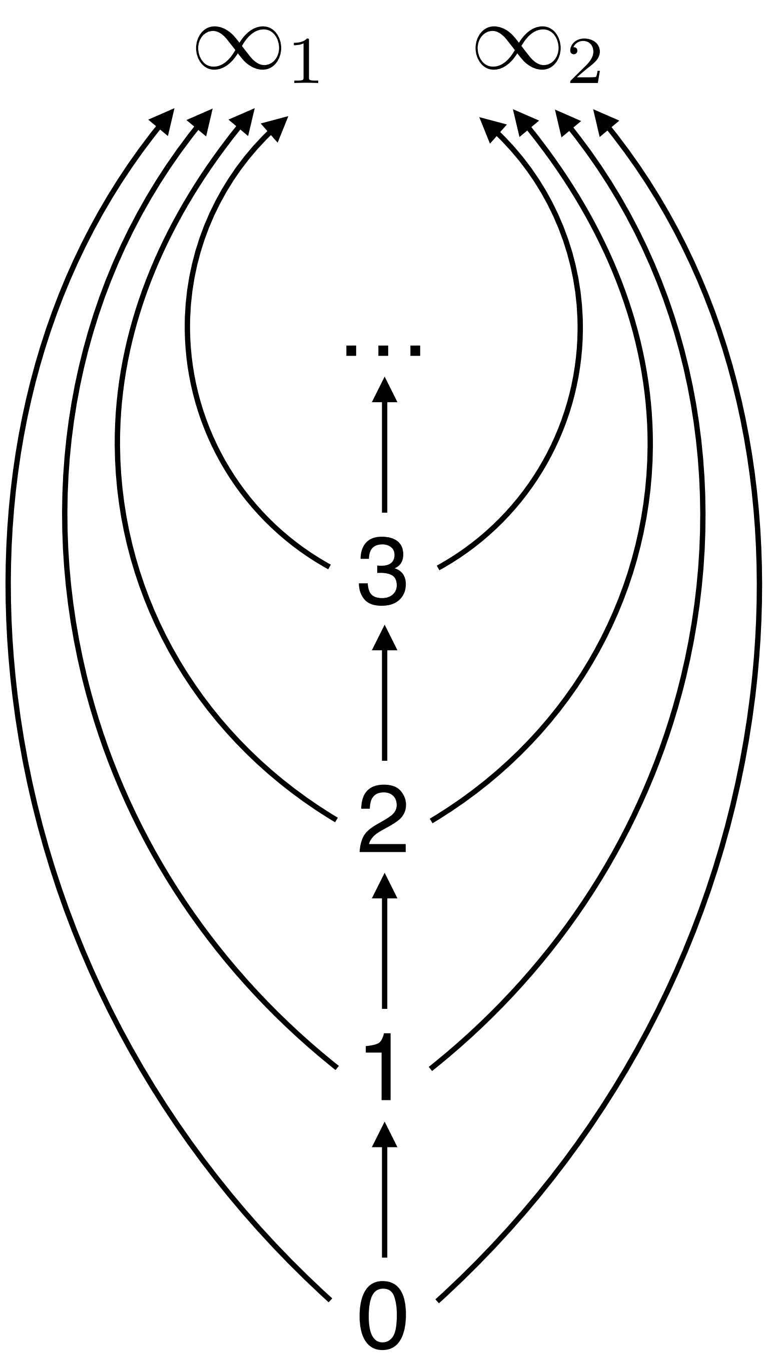
$(\wp(S), \subseteq)$ completo? ✓

$\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} S_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}. x \in S_k\}$$

Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty_1, \infty_2\}, \leq)$ complete? ❌



ogni catena infinita non ha limite
(insieme di u.b. $\{\infty_1, \infty_2\}$)