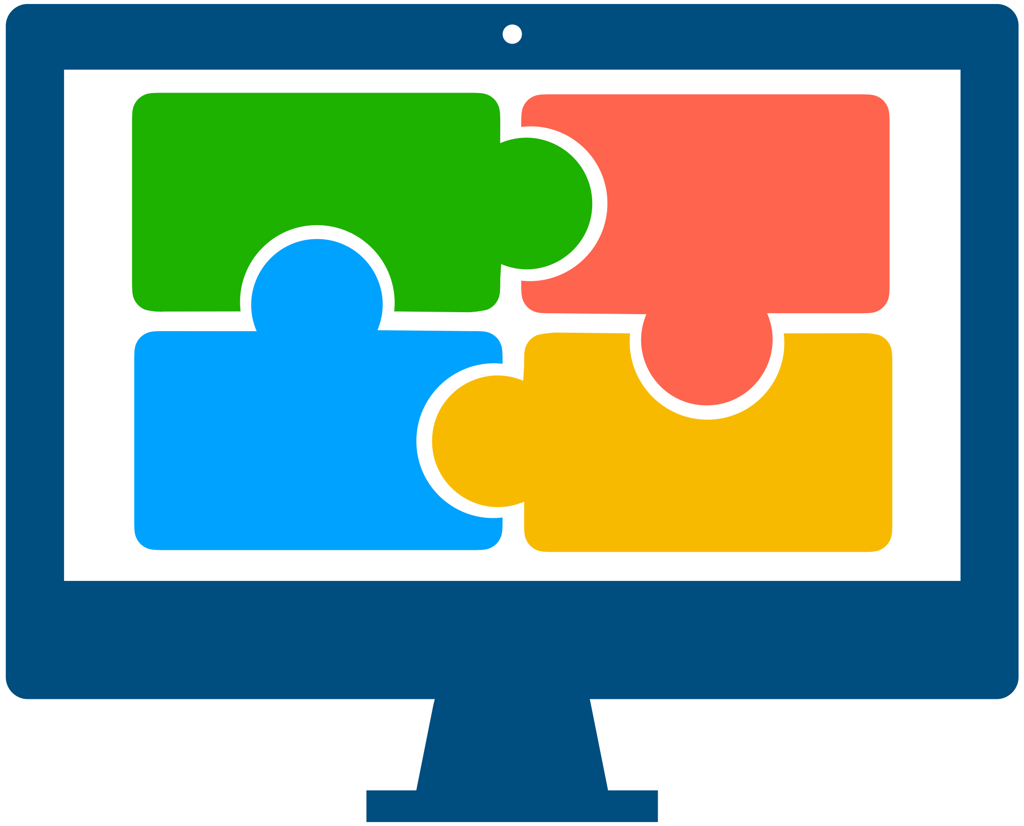

Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Esercitazione #2

Induzione strutturale,
induzione sulle regole e divergenza

Ex.1 Completare la prova di terminazione delle espressioni booleane per induzione strutturale

$$b \ ::= \ v \ \mid \ a \ \mathsf{cmp} \ a \ \mid \ \neg b \ \mid \ b \ \mathsf{bop} \ b$$

$$P(b) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u.\ \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

Ex. 1, Terminazione di Bexp

$$P(b) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u.\ \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

Per induzione strutturale

$$\left.\begin{array}{l} \forall v \in \mathbb{B}.\ P(v) \\ \forall a_0, a_1.\ P(a_0 \,\mathsf{cmp}\, a_1) \end{array}\right\} \text{vedi Lezione 7}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall b.\ P(b) \Rightarrow P(\neg b) \\ \forall b_0, b_1.\ (P(b_0) \wedge P(b_1)) \Rightarrow P(b_0 \,\mathsf{bop}\, b_1) \end{array}\right\} \text{da fare}$$

Ex. 1, Terminazione di Bexp

$$P(b) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u.\ \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

per induzione strutturale

$\forall b.\ P(b) \Rightarrow P(\neg b)$ prendiamo un generico $b \in Bexp$

Assumiamo $P(b) \triangleq \forall \sigma.\ \exists w.\ \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow w$

Vogliamo provare $P(\neg b) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u.\ \langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u$

prendiamo un generico σ

Consideriamo il goal $\langle \neg b, \sigma \rangle \longrightarrow u \quad \nwarrow_{u = \neg w} \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow w$

per ipotesi induttiva $P(b)$, tale w esiste

concludiamo prendendo $u = \neg w$

Ex. 1, Terminazione di Bexp

$$P(b) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u.\ \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u$$

per induzione strutturale

$\forall b_0, b_1.\ (P(b_0) \wedge P(b_1)) \Rightarrow P(b_0 \ \mathsf{bop}\ b_1)$ prendiamo generici $b_0, b_1 \in Bexp$

Assumiamo $P(b_i) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u_i.\ \langle b_i, \sigma \rangle \longrightarrow u_i$

Vogliamo provare $P(b_0 \ \mathsf{bop}\ b_1) \triangleq \forall \sigma.\ \exists u.\ \langle b_0 \ \mathsf{bop}\ b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u$

prendiamo un generico σ

Consideriamo il goal $\langle b_0 \ \mathsf{bop}\ b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u$

$\nwarrow_{u = u_0\ bop\ u_1}$ $\langle b_0, \sigma \rangle \longrightarrow u_0, \langle b_1, \sigma \rangle \longrightarrow u_1$

per ipotesi induttiva $P(b_0)$ e $P(b_1)$ tali u_1 e u_2 esistono

concludiamo prendendo $u = u_0\ bop\ u_1$

[Ex. 2] Estendiamo la sintassi delle espressioni aritmetiche con l'operatore $a_0 \sqcap a_1$

la cui big-step semantica operazionale e' data dalla regola

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$

1. Provare la terminazione o esibire un contro-esempio

2. Provare il determinismo o esibire un contro-esempio

Ex. 2, terminazione

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$

$$\langle 1 \sqcap 2, \sigma \rangle \not\longrightarrow$$

Ex. 2, determinismo

per induzione strutturale

$$\forall a_0, a_1.\ P(a_0) \wedge P(a_1) \Rightarrow P(a_0 \sqcap a_1)$$

Prendiamo un generico a_0, a_1

Assumiamo (per ipotesi induttiva)

$$P(a_i) \triangleq \forall \sigma, m_i, m_i'.\ \langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow m_i \wedge \langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow m_i' \Rightarrow m_i = m_i'$$

vogliamo provare

$$P(a_0 \sqcap a_1) \triangleq \forall \sigma, m, m'.\ \langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m \wedge \langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m' \Rightarrow m = m'$$

prendiamo generici σ, m, m' tali che $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$ and $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m'$

Vogliamo provare $m = m'$

Ex. 2,determinismo (con.)

Consideriamo il goal $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma\rangle \longrightarrow m$

Solo la regola $$\frac{\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n}$$ e' applicabile

quindi $\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow m$ e $\langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow m$

Analogamente, dal momento che

$$\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma\rangle \longrightarrow m'$$

deve essere $\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow m'$ e $\langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow m'$

Per ipotesi induttiva, concludiamo $m = m'$

Ex. 2, determinismo

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n}$$

Assumiamo (per ipotesi induttiva)

$$P(\langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow n) \triangleq \forall n'. \ \langle a_i, \sigma \rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

vogliamo provare

$$P(\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n) \triangleq \forall n'. \ \langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

prendiamo n' tale che $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n'$

Vogliamo provare $n = n'$

Ex. 2, determinismo (con.)

$$P(\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n) \triangleq \forall n'.\ \langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

$$P(\langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n) \triangleq \forall n'.\ \langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n' \Rightarrow n = n'$$

Consideriamo il goal $\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n'$

Solo la regola $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n \quad \langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n}{\langle a_0 \sqcap a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n}$ e' applicabile

quindi $\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n'$ e $\langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n'$

Per ipotesi induttiva, concludiamo $n = n'$

$[\mathbf{Ex.\ \ 3}]$ Estendiamo la sintassi delle espressioni aritmetiche con l'operatore $a_0 \sqcup a_1$

la cui big-step semantica operazionale e' data dalla regola

$$\frac{\langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow n_0}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_0} \qquad \frac{\langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow n_1}$$

1. Provare la terminazione o esibire un contro-esempio

2. Provare il determinismo o esibire un contro-esempio

Ex. 3, terminazione

per induzione strutturale

$$\forall a_0, a_1.\ P(a_0) \wedge P(a_1) \Rightarrow P(a_0 \sqcup a_1)$$

Prendiamo un generico a_0, a_1

Assumiamo $P(a_0) \triangleq \forall \sigma.\ \exists m_0.\ \langle a_0, \sigma \rangle \longrightarrow m_0$

$P(a_1) \triangleq \forall \sigma.\ \exists m_1.\ \langle a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m_1$

Vogliamo dimostrare $P(a_0 \sqcup a_1) \triangleq \forall \sigma.\ \exists m.\ \langle a_0 \sqcup a_1, \sigma \rangle \longrightarrow m$

Caso induttivo (con.)

Consideriamo un σ generico e prendiamo il goal $\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma\rangle \longrightarrow m$

Entrambe le regole $\dfrac{\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n_0}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n_0}$ $\dfrac{\langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n_1}$ sono applicabili

Prendiamo la prima

$$\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma\rangle \longrightarrow m \nwarrow \langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow m$$

Per ipotesi induttiva $P(a_0)$, esiste m_0 tale che $\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow m_0$

e abbiamo finito considerando $(m = m_0)$

Ex. 3, determinism

$$\frac{\langle a_0, \sigma\rangle \longrightarrow n_0}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n_0} \quad \frac{\langle a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \sqcup a_1, \sigma\rangle \longrightarrow n_1}$$

$$\langle 1 \sqcup 2, \sigma\rangle \longrightarrow 1 \qquad \langle 1 \sqcup 2, \sigma\rangle \longrightarrow 2$$

$$1 \neq 2$$

[**Ex. 4**] Consideriamo il comando

$$w \stackrel{\mathrm{def}}{=} \textbf{while } x > y \textbf{ do } (x := x + 1 \ ; \ y := y - 1)$$

Trovare l'insieme S di memorie σ tali che $\langle w, \sigma \rangle \not\to$ e provare che queste rispettano la condizione usando la regola di inferenza per la divergenza

Ex. 4, divergenza

$$w \triangleq \textbf{while } x > y \textbf{ do } (\underbrace{x := x+1; y := y-1}_{\text{c}})$$

consideriamo un generico σ

se $\sigma(x) \leq \sigma(y)$: $\langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma$

$$S \triangleq \{\sigma \mid \sigma(x) > \sigma(y)\}$$

- $\forall \sigma \in S.\ \langle x > y, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt}$ ✔
- $\forall \sigma \in S.\ \forall \sigma'.\ \langle x := x+1; y := y-1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \sigma' \in S$ ✔

infatti $\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' = \sigma[\sigma(x)+1/x, \sigma(y)-1/y]$

$\sigma'(x) = \sigma(x) + 1 > \sigma(y) + 1 > \sigma(y) - 1 = \sigma'(y)$ quindi $\sigma' \in S$

Percio', se $\sigma(x) > \sigma(y)$, allora $\langle w, \sigma \rangle \not\longrightarrow$

$[\mathbf{Ex.\ \ 5}]$ Provare il determinismo dell'espressione booleana usando l'induzione sulle regole

$$P(\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'.\ \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b, \sigma\rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'.\ \langle b, \sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{}{\langle v, \sigma\rangle \longrightarrow v}$$

Dobbiamo provare $P(\langle v, \sigma\rangle \longrightarrow v) \triangleq \forall u'.\ \langle v, \sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow v = u'$

Consideriamo u' t.c. $\langle v, \sigma\rangle \longrightarrow u'$ dobbiamo provare $v = u'$

consideriamo il goal $\langle v, \sigma\rangle \longrightarrow u'$

deve essere $\nwarrow_{u'=v}$ $\square$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b,\sigma\rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'.\ \langle b,\sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle a_0,\sigma\rangle \longrightarrow n_0 \quad \langle a_1,\sigma\rangle \longrightarrow n_1}{\langle a_0 \ \mathsf{cmp}\ a_1,\sigma\rangle \longrightarrow n_0\ cmp\ n_1}$$

assumiamo $\langle a_i,\sigma\rangle \longrightarrow n_i$

dobbiamo provare

$$P(\langle a_0 \ \mathsf{cmp}\ a_1,\sigma\rangle \longrightarrow n_0\ cmp\ n_1) \triangleq \forall u'.\ \langle a_0 \ \mathsf{cmp}\ a_1,\sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow n_0\ cmp\ n_1 = u'$$

Consideriamo u' t.c. $\langle a_0 \ \mathsf{cmp}\ a_1,\sigma\rangle \longrightarrow u'$

Dobbiamo provare $n_0\ cmp\ n_1 = u'$

Consideriamo il goal $\langle a_0 \ \mathsf{cmp}\ a_1,\sigma\rangle \longrightarrow u'$

deve essere che $\nwarrow_{u'=m_0\ cmp\ m_1}\ \langle a_0,\sigma\rangle \longrightarrow m_0, \langle a_1,\sigma\rangle \longrightarrow m_1$

per la determinatezza di Aexp $n_0 = m_0$ e $n_1 = m_1$

percio' $n_0\ cmp\ n_1 = m_0\ cmp\ m_1 = u'$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b,\sigma\rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'.\ \langle b,\sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle b,\sigma\rangle \longrightarrow v}{\langle \neg b,\sigma\rangle \longrightarrow \neg v}$$

assumiamo $P(\langle b,\sigma\rangle \longrightarrow v) \triangleq$
$\forall w.\ \langle b,\sigma\rangle \longrightarrow w \Rightarrow v = w$

dobbiamo provare

$$P(\langle \neg b,\sigma\rangle \longrightarrow \neg v) \triangleq \forall u'.\ \langle \neg b,\sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow \neg v = u'$$

Consideriamo u' t.c. $\langle \neg b,\sigma\rangle \longrightarrow u'$

dobbiamo provare $\neg v = u'$

Consideriamo il goal $\langle \neg b,\sigma\rangle \longrightarrow u'$

deve essere che $\nwarrow_{u'=\neg w}$ $\langle b,\sigma\rangle \longrightarrow w$

Per ipotesi induttiva $v = w$

percio' $\neg v = \neg w = u'$

Ex. 5, determinismo Bexp

$$P(\langle b, \sigma\rangle \longrightarrow u) \triangleq \forall u'.\ \langle b, \sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow u = u'$$

per induzione sulle regole

$$\frac{\langle b_0, \sigma\rangle \longrightarrow v_0 \quad \langle b_1, \sigma\rangle \longrightarrow v_1}{\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma\rangle \longrightarrow v_0\ bop\ v_1}$$

assumiamo $P(\langle b_i, \sigma\rangle \longrightarrow v_i) \triangleq$

$$\forall u_i.\ \langle b_i, \sigma\rangle \longrightarrow u_i \Rightarrow v_i = u_i$$

dobbiamo provare

$$P(\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma\rangle \longrightarrow v_0\ bop\ v_1) \triangleq \forall u'.\ \langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma\rangle \longrightarrow u' \Rightarrow v_0\ bop\ v_1 = u'$$

Consideriamo u' t.c. $\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma\rangle \longrightarrow u'$

dobbiamo provare $v_0\ bop\ v_1 = u'$

Consideriamo il goal $\langle b_0 \text{ bop } b_1, \sigma\rangle \longrightarrow u'$

deve essere che $\nwarrow_{u' = u_0\ bop\ u_1}\ \langle b_0, \sigma\rangle \longrightarrow u_0, \langle b_1, \sigma\rangle \longrightarrow u_1$

Per ipotesi induttiva $v_0 = u_0$ e $v_1 = u_1$

percio' $v_0\ bop\ v_1 = u_0\ bop\ u_1 = u'$

[Ex. 6] Sia b un'espressione booleana e un comando c. Considerate il comando

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \textbf{while } b \textbf{ do } c$$

Provare per induzione sulle regole

$$\forall \sigma, \sigma'.\ \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \ \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathit{false}$$

Ex. 6, uscita dal loop

$w \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c$ $\qquad$ $\forall \sigma, \sigma'.\ \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

per induzione strutturale? $\qquad$ per induzione sulle regole?

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

il predicato “mecha” con le conclusioni di due sole regole

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Ex. 6, uscita dal loop

$w \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c \qquad \forall \sigma, \sigma'.\ \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

per induzione sulle regole

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$

assumiamo $\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

dobbiamo provare $P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma) \triangleq \langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

immediato, per le assunzioni

Ex. 6, uscita dal loop

$w \stackrel{\text{def}}{=} \textbf{while } b \textbf{ do } c \qquad \forall \sigma, \sigma'. \ \langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma' \Rightarrow \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

per induzione sulle regole

$$P(\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma \rangle \to \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \to \mathbf{ff}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \textbf{while } b \textbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

assumiamo $\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt}$

$\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''$

$\langle w, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'$

$P(\langle w, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

dobbiamo provare $P(\langle w, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \langle b, \sigma' \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

immediato, per ipotesi induttiva