VRP con finestre temporali

(7.1, 7.2.1 Toth-Vigo)

- VRPTW (VRP con Time Windows): estensione di VRP capacitato al caso dinamico (dimensione tempo):

1) il servizio presso ogni cliente deve iniziare entro una finestra temporale associata al cliente stesso

2) il veicolo deve restare presso la locazione del cliente durante l'espletamento del servizio

Time windows:

1) soft: possono essere violate (ad un dato prezzo)

2) hard: non possono essere violate (se il veicolo arriva prima dell'inizio della finestra temporale, deve aspettare)

Complessità computazionale in tempo:

NP-Hard

VRPTW (time windows "hard")

- $G = (V, A)$ con $n+2$ nodi
- 0 rappresenta il deposito (vista come luogo iniziale delle rotte)
- $n+1$ rappresenta anch'essa il deposito (inteso come luogo terminale delle rotte)

Quindi: la rotta di ogni veicolo è modellata come un cammino orientato in G da 0 a $n+1$

inizio viaggio fine viaggio

Rappresentazione di una rotta

Ulteriori dati di input:

- $[a_i, b_i]$: finestra temporale del cliente i, $\forall i$
- t_{ij} : tempo di viaggio associato a (i,j), $\forall (i,j) \in A$
- s_i : tempo di servizio presso il cliente i, $\forall i$

Vincoli:

- Il servizio presso il cliente i deve iniziare in $[a_i, b_i]$, ed il veicolo deve fermarsi in i per s_i unità di tempo
- Se il veicolo arriva in i prima di a_i, deve attendere (inizio il servizio al tempo a_i)

VRPTW: determinare K cicli di costo minimo tali che:

- ogni ciclo include il deposito
- ogni cliente è visitato da esattamente un veicolo
- è rispettata la capacità C di ogni veicolo
- per ogni cliente i, il servizio inizia in $[a_i, b_i]$, ed il veicolo si ferma per s_i unità di tempo

<u>OSS</u>: VRPTW generalizza CVRP:

$a_i = 0$, $b_i = +\infty$ per ogni cliente i

<u>quindi</u>: VRPTW è NP-Hard in senso forte

Ipotesi modellistiche :

- anche 0 e $n+1$ (ovvero il deposito) hanno associata una finestra temporale

$$[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [E, L]$$

dove

E : primo istante possibile di partenza dal deposito

L : ultimo istante possibile di rientro al deposito

- $d_0 = d_{n+1} = s_0 = s_{n+1} = 0$

Esistono soluzioni ammissibili solo se :

(i) $$a_0 = E \leq \min_{i \in V \setminus \{0, n+1\}} (b_i - t_{0i})$$

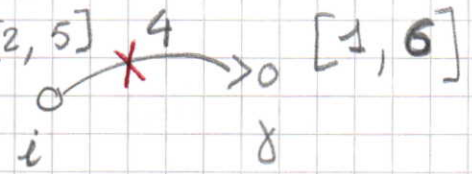
e

(ii) $$b_{n+1} = L \geq \min_{i \in V \setminus \{0, n+1\}} (a_i + s_i + t_{i0})$$

Inoltre, se:

- $a_i + s_i + t_{ij} > b_j$

$s_i = 1$



$2 + 1 + 4 = 7 > 6$

oppure

- $d_i + d_j > C$

allora (i,j) può essere eliminato da G (preprocessing)

Variabili decisionali del modello:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è percorso dal veicolo } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall (i,j) \in A \;,\; k = 1, \dots K$$

w_{ik} : tempo di inizio del servizio presso il nodo i, se i è servito dal veicolo k

$$\forall i \in V \;,\; k = 1, \dots K$$

variabili temporali!

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ijk}$$

(VRPTW)

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in N$$

$$\sum_{(0,j)\in FS(0)} x_{0jk} = 1 \qquad \forall k$$

$$\sum_{(i,j)\in BS(j)} x_{ijk} - \sum_{(j,i)\in FS(j)} x_{jik} = 0 \qquad \forall k, \forall j \in N$$

$$\sum_{(i,n+1)\in BS(n+1)} x_{i,n+1,k} = 1 \qquad \forall k$$

< vincoli di conservazione di flusso multicommodity >

$\forall k$ $\quad 0 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1} (n+1)$

(*) $$x_{ijk}\left(w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}\right) \le 0 \qquad \forall k, \forall (i,j)\in A$$

(°) $$a_i \cdot \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ijk} \le w_{ik} \le b_i \cdot \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ijk} \qquad \forall k, \forall i \in N$$

$$E \le w_{ik} \le L \qquad \forall k, i \in \{0, n+1\}$$

< vincoli temporali >

$$\sum_{i \in N} d_i \cdot \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ijk} \leq C \quad \forall k$$

< vincoli di capacità >

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall k, (i,j) \in A$$

dove $N = V \setminus \{0, n+1\}$ è l'insieme dei nodi cliente

---

OSS 1:

(*) Sono vincoli non lineari!

se $x_{ijk} = 1 \Rightarrow w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk} \leq 0$

ovvero $w_{ik} + s_i + t_{ij} \leq w_{jk}$

OSS 2: I vincoli (*) impongono che, se il cliente i non è servito dal veicolo k (ovvero $\sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ijk} = 0$), allora $w_{ik} = 0$

I vincoli (*) possono comunque essere "linearizzati", ovvero sostituiti dai seguenti vincoli lineari:

$$w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk} \leq (1 - x_{ijk}) M_{ij}$$

$$\forall k, \forall (i,j) \in A$$

con M_{ij} costanti opportunamente elevate

esempio $M_{ij} = \max \{ b_i + s_i + t_{ij} - a_j, 0 \}$

$$\forall (i,j) \in A$$

poiché $w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk} \leq \underbrace{b_i + s_i + t_{ij}}_{M_{ij}} - a_j$

$$\forall (i,j)$$

se $x_{ijk} = 0$ la condizione è sempre soddisfatta (vincolo ininfluente!)

Esempio (VRPTW)

- $K = 2$ $\quad n = 7$ (numero clienti)
- s_i

1	1	1	1	2	2	1

$\forall i$

- $[a_i, b_i]$ $\forall i$ (in figura)
- t_{ij} $\forall (i,j)$ (in figura) (per alcuni archi)
- d_i

2	1	2	3	3	4	4

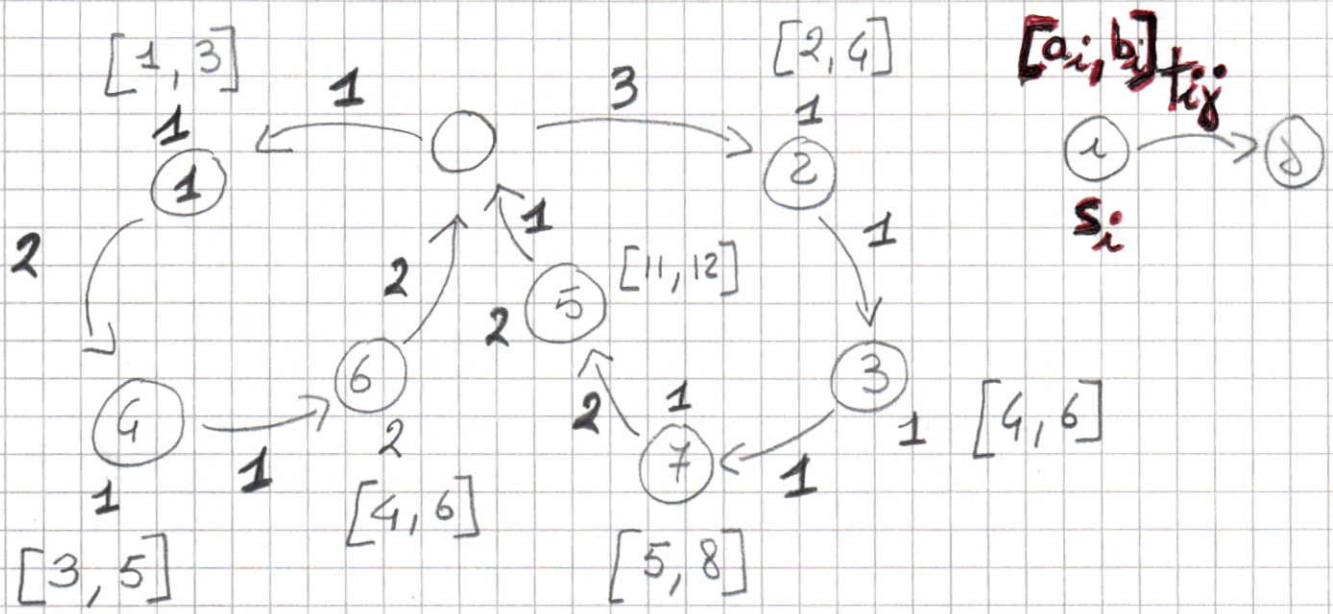
$\forall i$

- $C = 10$

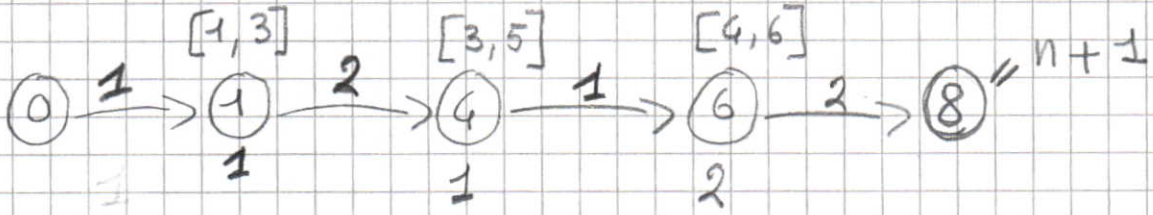
+

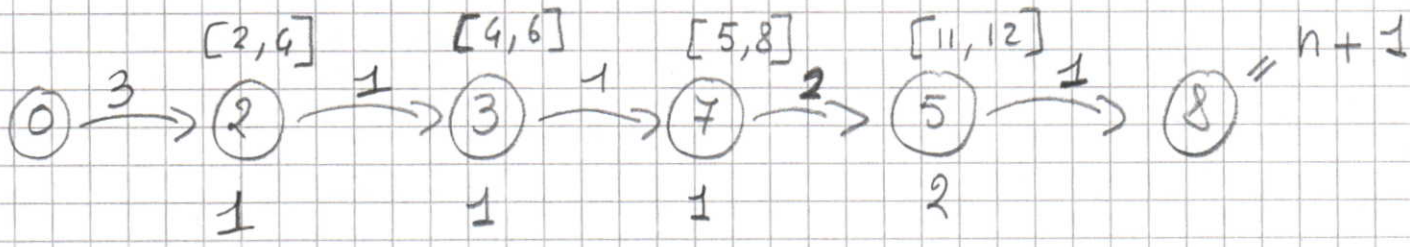
$< c_{ij}, \forall (i,j) >$

Una soluzione ammissibile:



Rappresentazione modellistica della rete:





$E = 0$ primo istante possibile di partenza dal deposito

$L = ?$ ultimo istante possibile di rientro al deposito

$$[a_0, b_0] = [a_8, b_8] = [0, L]$$

Variabili decisionali:

- $x_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene a} \\ & \text{rotta veicolo 1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $x_{ij2} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene a rotta} \\ & \text{veicolo 2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

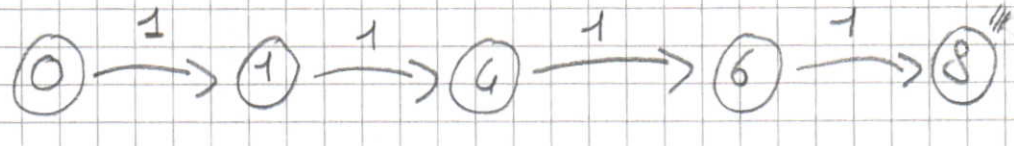
- w_{i1} : Tempo di inizio servizio presso nodo i, $\forall i$ servito dal veicolo 1 (0 altrimenti)

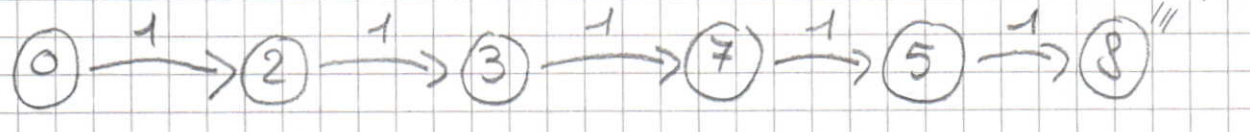
- w_{i2} : Tempo di inizio servizio presso nodo i, $\forall i$ servito dal veicolo 2 (0 altrimenti)

$\{w_{i1}\}, \{w_{i2}\}$: variabili di "scheduling"

< vincoli di progetto >

rotta 1

$\{x_{ij}=1\}$ 

$\{x_{ij}=2\}$ 

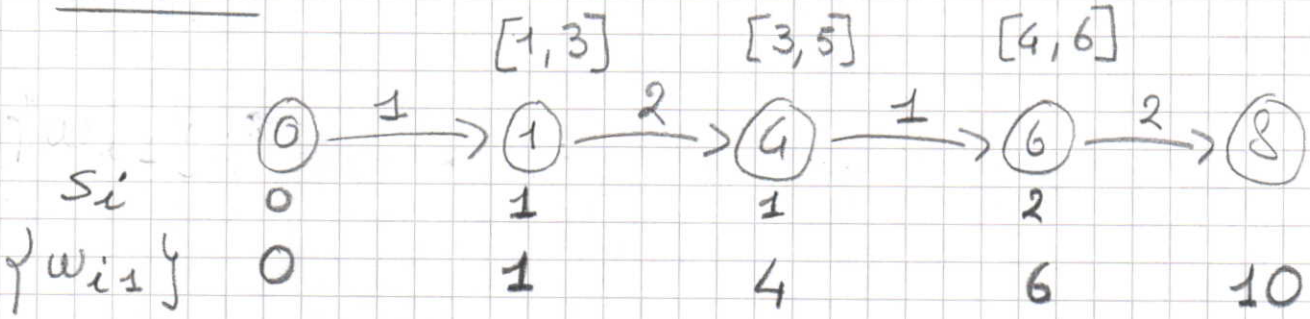
rotta 2

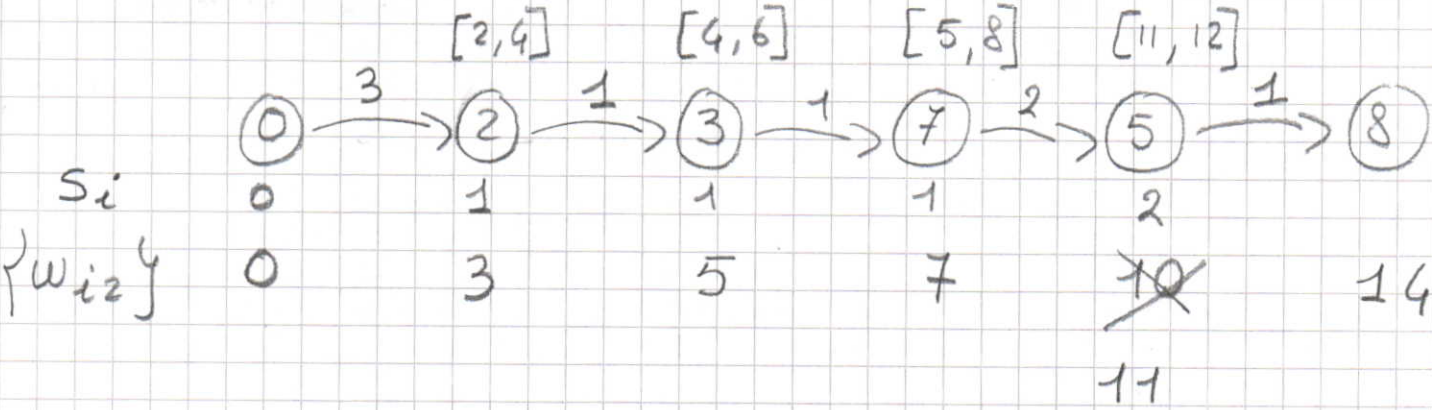
- sia il veicolo 1 che il veicolo 2 escono dal deposito (nodo 0)
- sia il veicolo 1 che il veicolo 2 rientrano al deposito (nodo 8)
- esattamente un veicolo entra in ogni nodo cliente ($N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$)
- se un veicolo entra in un nodo cliente, lo stesso veicolo esce da quel nodo cliente

ok soddisfatti

< vincoli temporali >

rotta 1





NOTA: il veicolo 2 deve aspettare!

NOTA: $L \geq 14$

- $a_i \leq w_{i1} \leq b_i \quad \forall i$ rotta 1
- $a_i \leq w_{i2} \leq b_i \quad \forall i$ rotta 2
- $\underset{0}{E} \leq w_{01}, w_{81}, w_{02}, w_{82} \leq L \quad (\geq 14)$ (altrimenti 0)
- se $x_{ij1} = 1 \Rightarrow w_{i1} + s_i + t_{ij} \leq w_{j1}$
- se $x_{ij2} = 1 \Rightarrow w_{i2} + s_i + t_{ij} \leq w_{j2}$

OK soddisfatti!

Come linearizzare tali vincoli?

es $(7,5)$ $\quad x_{752} = 1$:

$$\underbrace{w_{72}}_{i^K} + s_7 + t_{75} - \underbrace{w_{52}}_{j^K} \leq (1 - x_{752}) M_{75}$$

dove $M_{75} = \max\{b_7 + s_7 + t_{75} - a_7, 0\}$

$= \max\{7 + 1 + 2 - 5, 0\} = 5$

quindi:

$$\underbrace{w_{72}}_{\leq b_7 = 7} + 1 + 2 - \underbrace{w_{52}}_{\geq a_7 = 5} \leq (1 - x_{752}) \cdot 5$$

- se x_{752} fosse stato 0, il vincolo sarebbe sempre soddisfatto! (M_{75} è una stima per eccesso del membro sinistro)
- essendo $x_{752} = 1$:

$$w_{72} + s_7 + t_{75} \leq w_{52}$$

soddisfatto dalla soluzione data

< vincoli di capacità >

- tratta 1

$$\sum_{i \in \text{tratta } 1} d_i = 9 < C = 10$$

- tratta 2

$$\sum_{i \in \text{tratta } 2} d_i = 10 = C$$

soddisfatti anch'essi dalla soluzione corrente!

Quesiti:

1) Come mai (VRPTW) non contiene vincoli per escludere cicli (≡ rotte) non connesse al deposito?
(tipo vincoli (CCC) oppure (GSEC))

2) Come si potrebbe modificare (VRPTW) al caso finestre temporali "soft", ovvero il servizio ad ogni modo i può iniziare dopo b_i, pagando però una penalità p_i per ogni unità di tempo di slittamento oltre la finestra temporale (ovvero $(w_{ik} - b_i)$, se i è servito dal veicolo k))?