

Introduzione alla Programmazione Lineare e alla modellazione via "Spreadsheet"

4

(C.T. Regsdal: Cap 2 e 3)

Come risolvere problemi decisionali (in logistica)?

- Modello di calcolo: modello matematico implementato mediante un computer

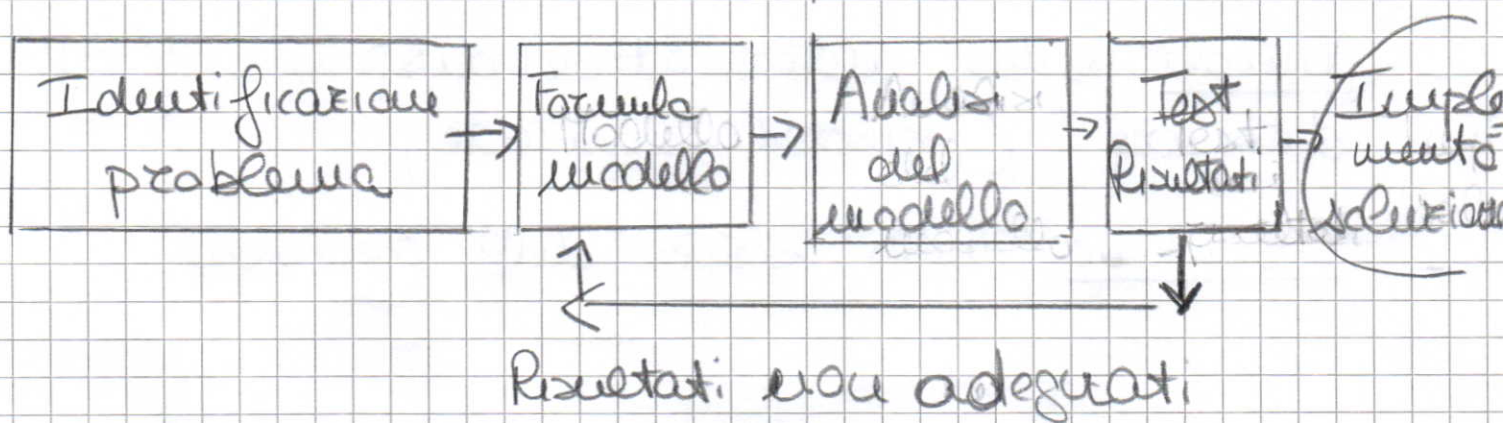
- spreadsheet models (modelli di calcolo implementati via fogli elettronici); sono tra i più convenienti e usati in business per analizzare e prendere decisioni!



Management Science (area di Ricerca Operativa):

campo di studio che utilizza matematica, informatica e statistica per formulare e risolvere problemi di business ("problem-solving")

Schema del processo di problem-solving:



Problemi di Ottimizzazione e Programmazione Lineare

Programmazione Matematica ^(PM): campo di Management Science che cerca il modo ottimo, o il più efficiente, per usare risorse limitate per raggiungere gli obiettivi di individui o di un business

Problemi di ottimizzazione: massimizzare profitto o minimizzare costi

Applicazioni: esempi di "decision-making" cui

le tecniche PM (ottimizzazione) si applicano:

- Determinazione di piani di produzione
- Manufacturing
- Pianificazione finanziaria
- Logistica:

In tutti i casi:

- Decisioni da prendere
- Vincoli sulle alternative disponibili al decisore (risorse limitate)
- Obiettivo nella scelta delle decisioni

Come esprimere un problema di ottimizzazione mediante un modello matematico

4''

Decisioni $\rightarrow$ Variabili decisionali del modello
 $x_1, x_2, \dots, x_n$

Vincoli $\rightarrow$ Relazioni matematiche queli

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$$

Obiettivo $\rightarrow$ Funzione obiettivo del modello

$$\text{Max (o Min)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Tipico schema di modello matematico:

$$\text{Max (o Min)} f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{Subject to } f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$\vdots$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_k$$

$\vdots$

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m$$

Il Programmazione Lineare (PL), vincoli e funzione obiettivo sono lineari:

$$\text{Max (o Min)} \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$\vdots$

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \geq b_k$$

$\vdots$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

Problema

di

PL

$c_1, \dots, c_n$: coefficienti della f.o. (costi)

a_{ij} : coefficiente dell' i -^{mo} vincolo relativo a x_j ,
 $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

Un esempio di problema di PL

- esempio molto semplice proprio della logistica interna (produzione)
- LP permette di risolvere problemi decisionali estremamente complessi (con notevoli risparmi per le aziende coinvolte!)

Blue Ridge Hot Tubs produce e vende 2 tipi di vasca idromassaggio: Aqua-Spa e Hydro-Lux; acquista da un produttore locale vasche prefabbricate, e aggiunge pompe e tubi.

Durante il prossimo ciclo produttivo:

- 200 pompe disponibili

- 1566 ore lavorative

- 2880 m. di tubi

< Vincoli >

Ogni Aqua-Spa : 9 ore lavorative e 12 m. tubi

Ogni Hydro-Lux : 6 " " e 16 " "

Profitto : 350 Euro per ogni Aqua-Spa
300 Euro " " "

(Si ritiene di riuscire a vendere ogni vasca prodotta)

Problema decisionale (di ottimizzazione): Quante

Aqua-Spa e quante Hydro-Lux produrre per

massimizzare il profitto durante il prossimo ciclo produttivo?

Come esprimere il problema di Blue Ridge Hot
Tubs mediante un modello matematico
(PL)?

Formulazione (è spesso un'arte)

• Identifichiamo le variabili decisionali:

x_1 : quante Aqua-Spa produrre

x_2 : quante Hydro-Lux produrre

• Formuliamo i vincoli come combinazioni
lineari delle var. decisionali:

$$x_1 + x_2 \leq 200 \quad \text{n° pompe disponibili}$$

$$9x_1 + 6x_2 \leq 1566 \quad \text{n° massimo ore lavorative}$$

$$12x_1 + 16x_2 \leq 2880 \quad \text{m. di tubi disponibili}$$

$$x_1 \geq 0$$

non negatività delle
var. decisionali

$$x_2 \geq 0$$

• Formuliamo la funzione obiettivo come
combinazione lineare delle var. decisionali:

$$\max \quad 350x_1 + 300x_2$$

Modello PL: $\max 350 x_1 + 300 x_2$

5"

regione
ammissibile del
problema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 200 \\ 9 x_1 + 6 x_2 \leq 1566 \\ 12 x_1 + 16 x_2 \leq 2880 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

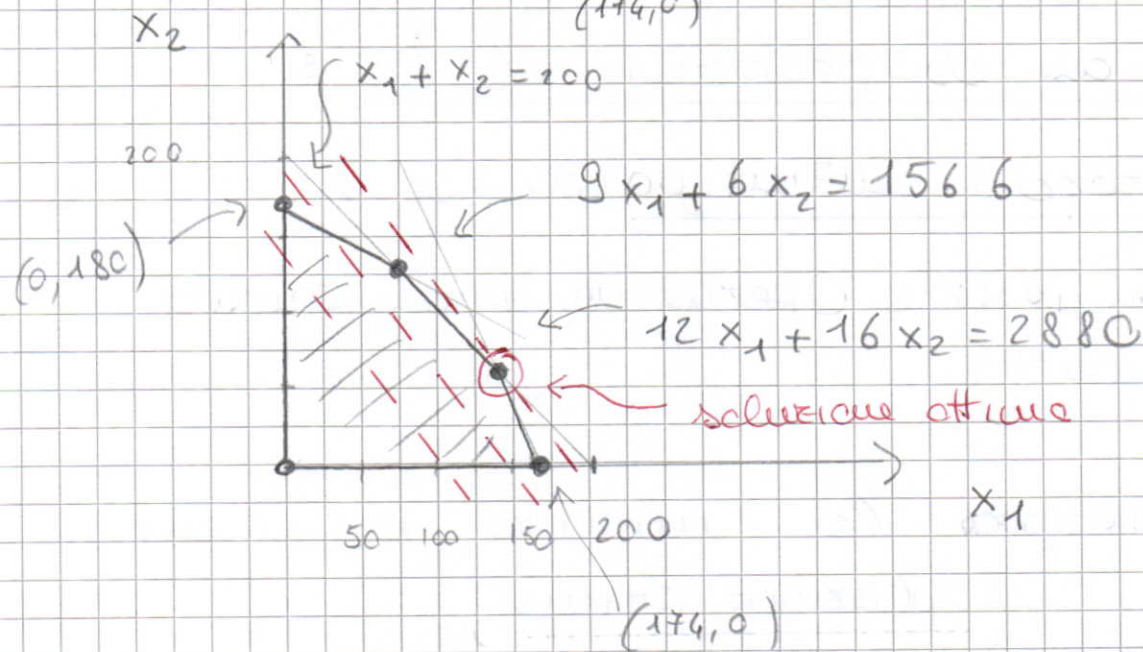
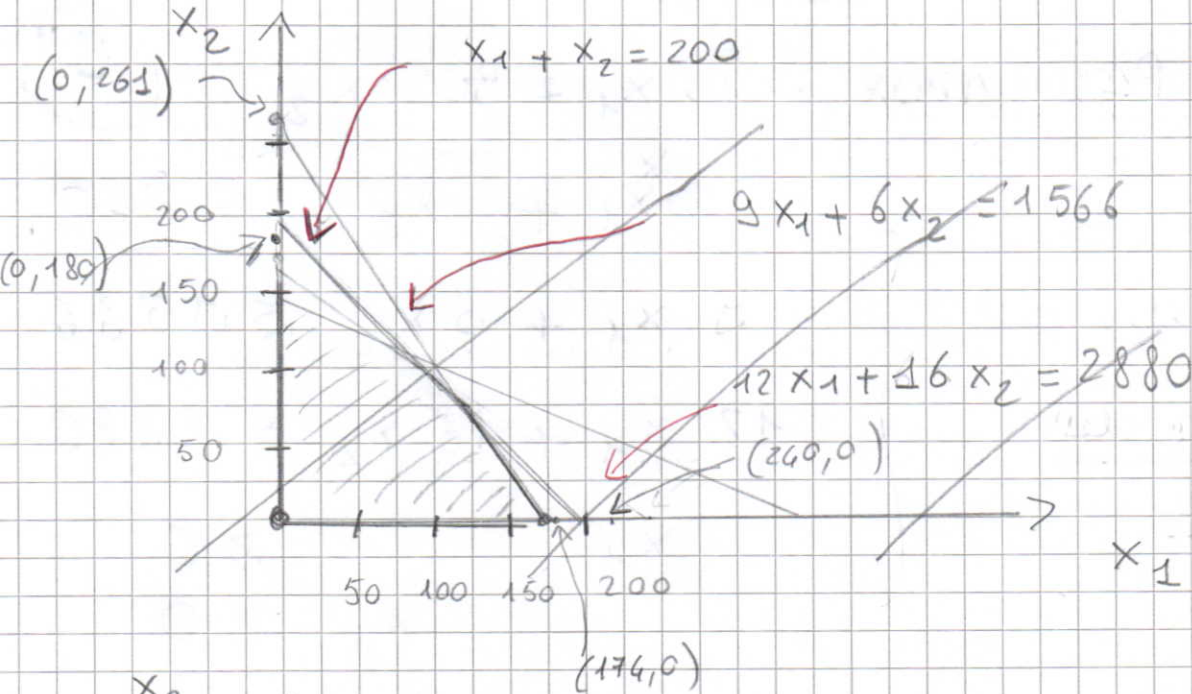
Risoluzione di problemi di PL :

Approccio Intuitivo

($\rightarrow$ Corso di Ricerca Operativa per studio approfondito)

Come determinare la "migliore" soluzione ammissibile? (soluzione ottima)

Nel caso di due variabili si può usare un approccio grafico



(massimo
profitto per
Blue Ridge
Hot Tubs)

- punti estremi della regione ammissibile

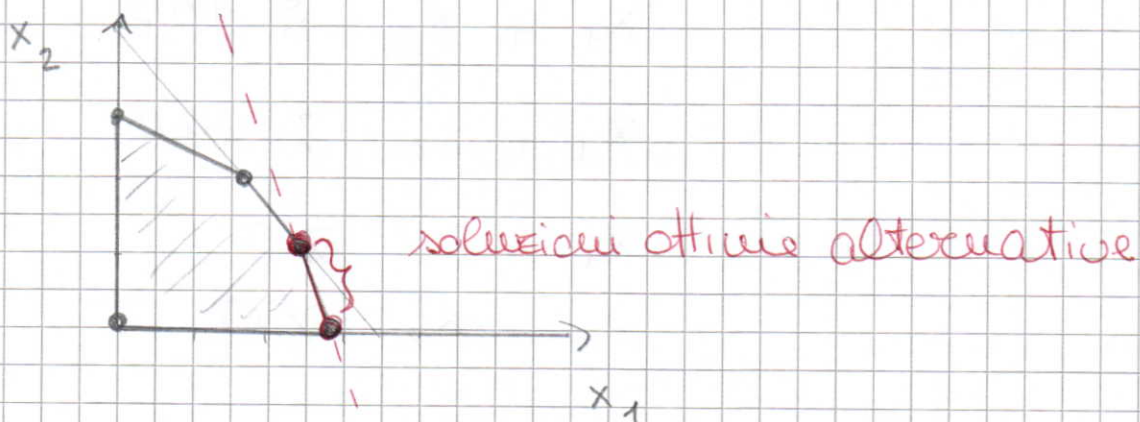
Proprietà: In caso di ottimo finito, esiste una soluzione ottimale corrispondente di un punto estremo della regione ammissibile

Come determinarlo? Usando le curve di
quello della funzione obiettivo

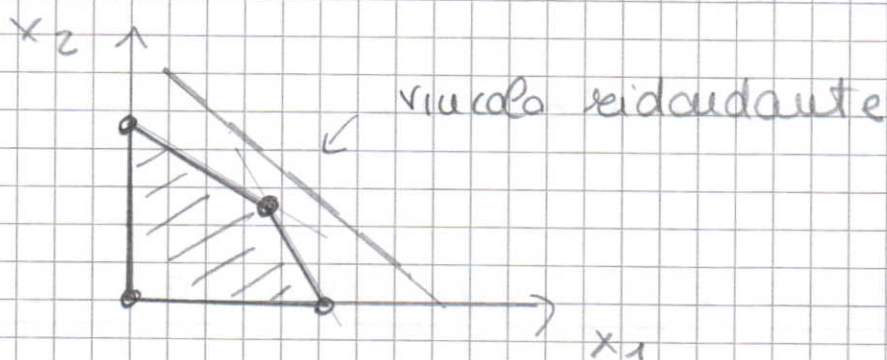
Altri possibili esiti:

(6)

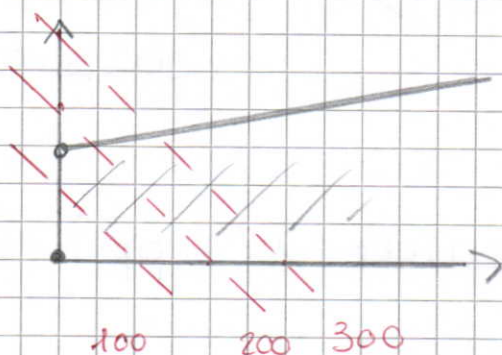
1) soluzioni ottime alternative



2) vincoli ridondanti (non creano problemi)



3) ottimo illimitato



$$f_0 : x_1 + x_2$$

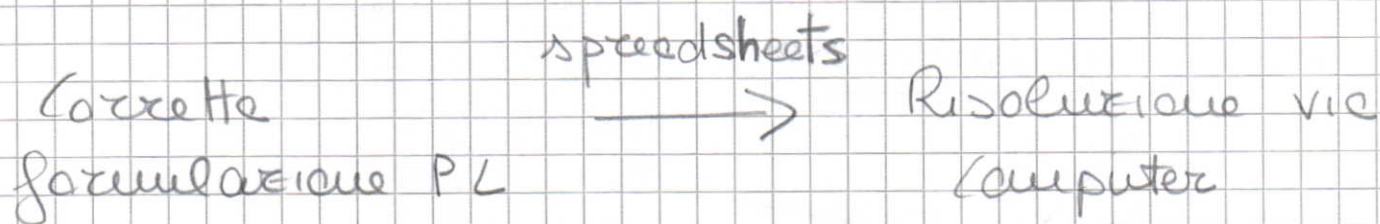
normalmente è dovuto ad un errore di modellazione (es. mancano alcuni vincoli)

4) Inammissibilità

$$\begin{aligned} \text{es} \quad \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & x_1 + x_2 \geq 200 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

errore di modellazione o necessità di eliminare o modificare alcuni vincoli per avere soluzioni ammissibili.

Modellazione e risoluzione via Spreadsheet



EXCEL: concetti e tecniche si applicano ad altri spreadsheet packages

Alternative: pacchetti di programmazione matematica (CPLEX, Lindo, COIN ...), soprattutto per problemi di grandi dimensioni

< Esercitazione : come implementare il modello Blue Ridge Hot Tubs >

6"

Pianificazione di produzione e scorte (inventory)
(logistica interna)

(3.12 C.T. Regsdale)

- Uptau Corporation produce compressori ad aria
- Vuole pianificare i livelli di produzione e scorte per i prossimi 6 mesi

Previsioni :

	<u>Mesi</u>					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Costo di produzione unitario	\$ 240	250	265	285	280	260
Unità richieste	1000	4500	6000	5500	3500	4000
Produzione massima	4000	3500	4000	4500	4000	3500

Capacità magazzino : 6000 unità (alla fine di ogni mese)

Livello di sicurezza : 1500 unità
delle scorte

Vincolo di stabilità della produzione:

livello di produzione $\geq \frac{1}{2}$ produzione massima al mese

Costo di stoccaggio in un mese: $1,5\%$ costo di produzione nello stesso mese

Livello delle scorte corrente: 2750 unità

Problema: Determinare piano di produzione e scorte per i prossimi 6 mesi in modo da soddisfare la domanda attesa mensile e minimizzando costi di produzione e scorte

⊙

Dati decisionali:

P_i : numero unità prodotte il mese i ,

$i = 1, \dots, 6$

B_i : livello delle scorte all'inizio del mese i ,
 $i = 1, \dots, 6$

(Livello medio delle scorte)

⊙ Numero unità prodotte al mese $\rightarrow$ scorte $\frac{\text{nel mese}}{2}$

È stimato come la media del livello iniziale e finale delle scorte ogni mese

Un modello di PL

7

← COSTI DI PRODUZIONE

$$\begin{aligned} \text{Min } & 240 P_1 + 250 P_2 + 265 P_3 + 285 P_4 + 280 P_5 + \\ & + 260 P_6 + 3.6 (B_1 + B_2)/2 + 3.75 (B_2 + B_3)/2 + \\ & + 3.98 (B_3 + B_4)/2 + 4.28 (B_4 + B_5)/2 + 4.20 (B_5 + B_6)/2 \\ & + 3.9 (B_6 + B_7)/2 \end{aligned}$$

← COSTI DI INVENTORY

$$2000 \leq P_1 \leq 4000$$

$$1750 \leq P_2 \leq 3500$$

$$2000 \leq P_3 \leq 4000$$

$$2250 \leq P_4 \leq 4500$$

$$2000 \leq P_5 \leq 4000$$

$$1750 \leq P_6 \leq 3500$$

$$1500 \leq B_1 + P_1 - 1000 \leq 6000$$

$$1500 \leq B_2 + P_2 - 4500 \leq 6000$$

$$1500 \leq B_3 + P_3 - 6000 \leq 6000$$

$$1500 \leq B_4 + P_4 - 5500 \leq 6000$$

$$1500 \leq B_5 + P_5 - 3500 \leq 6000$$

$$1500 \leq B_6 + P_6 - 4000 \leq 6000$$

Vincoli sui
livelli di
produzione
(al mese)

Vincoli
sui livelli
delle
scorte
(al mese)

$$B_2 = B_1 + P_1 - 1000$$

$$B_3 = B_2 + P_2 - 4500$$

$$B_4 = B_3 + P_3 - 6000$$

$$B_5 = B_4 + P_4 - 5500$$

$$B_6 = B_5 + P_5 - 3500$$

$$B_7 = B_6 + P_6 - 4000$$

$$(B_1 = 2750)$$

Il livello delle
scorte iniziale
del mese i è
uguale al livello
finale del mese
 $i-1$,
 $i = 2, \dots, 6$

< Esercitazione : Come implementare il
modello Upton >

Introduzione alla Programmazione Lineare Intera e alla sua modellazione via "Spreadsheet"

7

(C.T. Ragsdale: Cap. 6)

Molti problemi di business richiedono soluzioni
interi (es quanti lavoratori schedare, quanti
aerei acquistare)

→ Programmazione Lineare Intera (PLI)

= (alcune) variabili decisionali possono assumere
solo valori interi

es Blue Ridge Hot Tubs problem

$$\max 350x_1 + 300x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 200$$

$$9x_1 + 6x_2 \leq 1566 \quad 1520$$

$$12x_1 + 16x_2 \leq 2880 \quad 2650$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$[x_1, x_2 \text{ interi}] \quad \text{vincolo di integralità}$$

Possibile approccio: ignorare [] e risolvere
il corrispondente rilassamento PL (continuo)

La sol. ottima del rilassamento è $x_1 = 122$,
 $x_2 = 78$: intera! Risolve il problema originario!
Non è sempre così: cambiando i due termini
noti  otterrei sol. ottimo $x_1 = 116,9444$ e
 $x_2 = 77,9167$ non intera!

Il profitto è \$64.306 : il costo della sol.
ottima intera è quindi ≤ 64.306 (problema
di max)

Possibilità:

1) arrotondamento (per difetto): Trovo una
soluzione ammissibile intera (non necessariamente
ottima): es $\hat{x}_1 = 116$ e $\hat{x}_2 = 77$ (profitto
\$ 63.700)

2) risolvere direttamente il modello PLI
(ex. mediante il Solver di EXCEL): Tolleranza
di subottimalità di $X\%$ ($\equiv$ indica all'algo-
ritmo di fermarsi appena Trovo una soluzione
intera $\leq X\%$ "peggio" della soluzione ottima
intera (come valore della f. obiettivo))

⑧

< Esercitazione: risoluzione del modello
PLI per Blue Ridge Hot Tubs >

Altri esempi (Logistica Interco)

1) Problemi a "carico fisso" (6.12, 6.13
 C.T. Rogersdale)

Remington Manufacturing: deve pianificare
 il prossimo ciclo produttivo; 3 prodotti,
 ognuno dei quali deve essere soggetto alle opera-
 zioni sotto riportate

Op.	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Totale ore disponibili
	2	3	6	600
	6	3	4	300
	5	6	2	400

Ore richieste

Profitti unitari: \$48 \$55 \$50

Costi per operazioni di setup
 \$1000 \$800 \$900

lungo le linee di produzione

Problema: quanto produrre per massimizzare il profitto "netto"?

Variabili decisionali

x_i : quante unità di prodotto i produrre, $i = 1, 2, 3$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

Variabili
binarie
(condizioni
logiche)

Modello P.L.I.:

$$\text{Max } 48x_1 + 55x_2 + 50x_3 - 1000y_1 - 800y_2 - 900y_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 600$$

$$6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 300$$

$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 400$$

} vincoli
sulle ore
disponibili

$$x_1 - 50y_1 \leq 0$$

$$x_2 - 67y_2 \leq 0$$

$$x_3 - 75y_3 \leq 0$$

} "linking" constraint

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3$$

OSS : 50, 67 e 75 è il numero massimo producibile in base ai dati del problema

< Esercitazione: come implementare Remington's fixed-charge problem >

8"

2) Problemi di trasporto (6.16 C.T. Ragsdale)

B & G Construction : deve acquistare cemento (in tonnellate) per i suoi progetti

		Costo di trasporto unitario				
		Prog. 1	Prog. 2	Prog. 3	Prog. 4	Max
Compagnia 1		\$ 120	115	130	125	525
"	2	100	150	110	105	450
"	3	140	95	145	165	550
Tonnellate necessarie		450	275	300	350	

Vincoli aggiuntivi:

Compagnia 1: ordini ≥ 150 tonnellate per qualsiasi progetto

Compagnia 2: > 200 tonnellate ad al più un progetto

Compagnia 3: solo ordini per un totale di $\geq 200, 400$ o 550 tonnellate (oppure 0!)

Problema : quanto acquistare da ogni compagnia
in modo da soddisfare le domande dei progetti
a costo minimo? (problema di "trasporto"
con vincoli aggiuntivi) ↑

Variabili decisionali

X_{ij} : tonnellate di cemento acquistate dalla
compagnia i per il progetto j ,

$i = 1, 2, 3$

$j = 1, 2, 3, 4$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{ij} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$

$j = 1, 2, 3, 4$

Modello P.L.I.:

9

$$\begin{aligned} \text{Min } & 120 x_{11} + 115 x_{12} + 130 x_{13} + 125 x_{14} \\ & + 100 x_{21} + 150 x_{22} + 110 x_{23} + 105 x_{24} \\ & + 140 x_{31} + 95 x_{32} + 145 x_{33} + 165 x_{34} \end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 525$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 450$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 550$$

Max.
affollamenti
dalla
compagnie

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 450$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 275$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 350$$

vincoli di
domande
(soddisfattiamento
progetti)

$$x_{11} \leq 525 y_{11}$$

$$x_{12} \leq 525 y_{12}$$

$$x_{13} \leq 525 y_{13}$$

$$x_{14} \leq 525 y_{14}$$

$$x_{11} \geq 150 y_{11}$$

$$x_{12} \geq 150 y_{12}$$

$$x_{13} \geq 150 y_{13}$$

"linking" constraints

ordini di
almeno 150 tonnellate

Compagnia
1

$$x_{14} \geq 150 y_{14}$$

Compagnia
2

$$x_{21} \leq 200 + 250 y_{21}$$

$$x_{22} \leq 200 + 250 y_{22}$$

$$x_{23} \leq 200 + 250 y_{23}$$

$$x_{24} \leq 200 + 250 y_{24}$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} \leq 1$$

Compagnia
3

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200 y_{31} + 400 y_{32} + 550 y_{33}$$

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} \leq 1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$

"

"

< Esercitazione: come implementare il problema di B & G Construction >