

Problemi di flusso su rete

17

- Problemi di trasporto (routing) in logistica (ma non solo....)

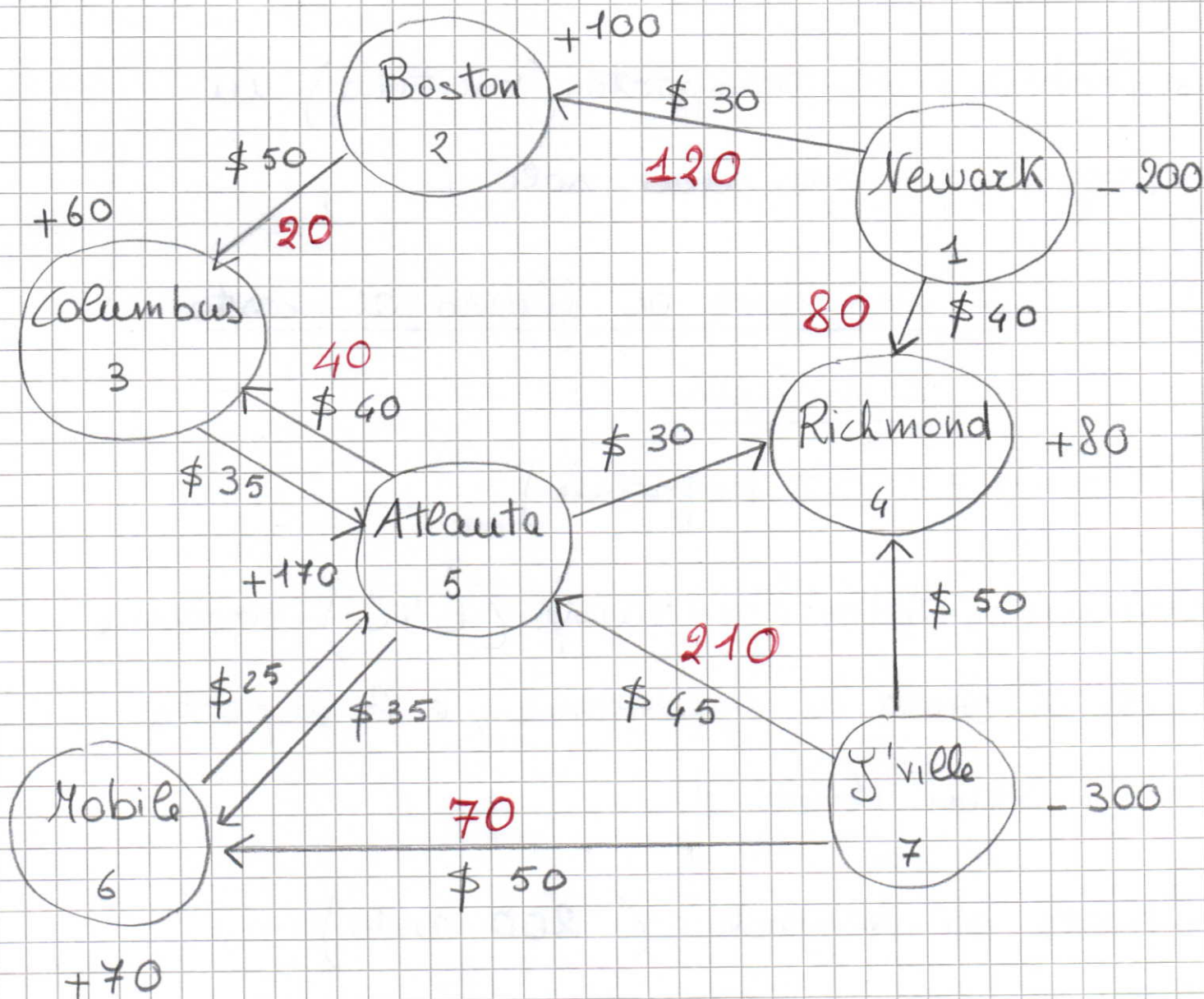
Il problema di flusso di costo minimo

(Cap. 5.1 C.T. Ragsdale)

Baraxian Motor Company (BMC) produce auto di lusso in Germania, e le esporta negli Stati Uniti:

- porto di Newark (200 auto)
- porto di Jacksonville (300 auto)
- trasporto (via ferrovia o camion) verso i distributori in 6 città americane.

Rete associata a (BMC) (grafo orientato):



Newark e Y'ville : modi offerta
(supply nodes)

es -200 (offerta)

Boston ... : modi domanda
(demand nodes)

es +100 (domanda)

("flowing")

Problema decisionale: come trasportare 18

a costo minimo 6 auto dai due porti ai distributori

Modello P.L.:

Variabili decisionali:

x_{ij} : numero di auto inviate dal nodo i al nodo j , $\forall$ arco (i, j)

• 11 variabili di flusso

Vincoli di bilancio ai nodi:

es nodo 1 (New arc) offerta

$$x_{12} + x_{14} \leq 200 \quad \text{ovvero}$$

$$-x_{12} - x_{14} \geq -200$$

es nodo 2 (Boston) domanda

$$x_{12} - x_{23} = 100 \quad \left(\begin{array}{l} \text{differenza libro} \\ \geq 100 \end{array} \right)$$

Modello P.L. :

$$\begin{aligned} \text{Min } & 30x_{12} + 40x_{14} + 50x_{23} + 35x_{35} + \\ & + 40x_{53} + 30x_{54} + 35x_{56} + 25x_{65} + \\ & + 50x_{74} + 45x_{75} + 50x_{76} \end{aligned}$$

$$-x_{12} - x_{14} \geq -200$$

$$x_{12} - x_{23} = +100$$

$$x_{23} + x_{53} - x_{35} = +60$$

$$x_{14} + x_{54} + x_{74} = +80$$

$$x_{35} + x_{65} + x_{75} - x_{53} - x_{54} - x_{56} = +170$$

$$x_{56} + x_{76} - x_{65} = +70$$

$$-x_{74} - x_{75} - x_{76} \geq -300$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j)$$

< Esercitazione : BME via Excel >

Nota : nel problema di flusso di costo

minimo i vincoli sono tutti di tipo "="

(vincoli di conservazione di flusso) :

offerta totale = domanda totale!

< Soluzione (flusso) ottimale
in figura >

18"

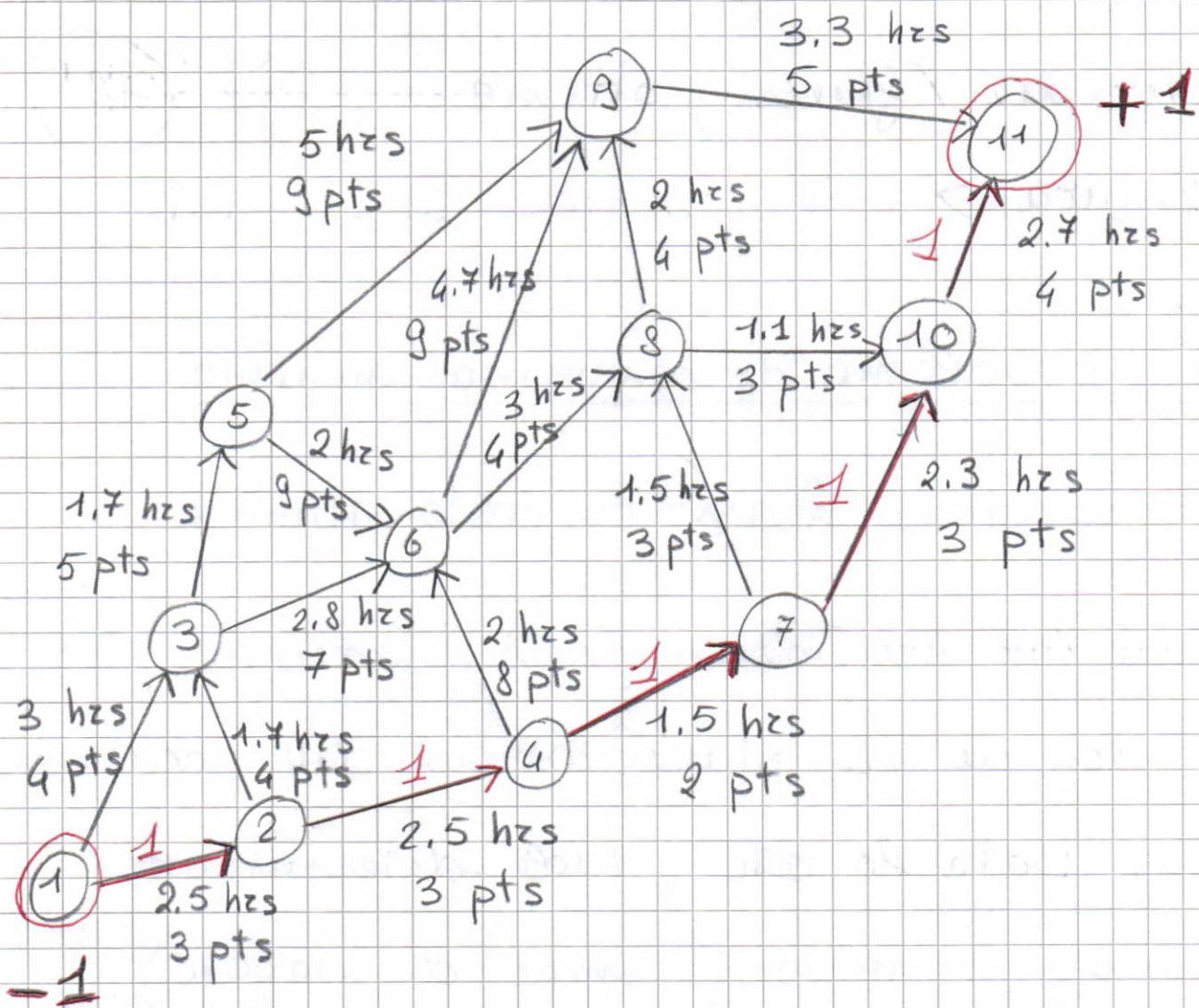
Il problema di cammino minimo

- Caso speciale flusso di costo minimo

American Car Association (ACA) fornisce vari servizi, tra cui la pianificazione del percorso stradale. Data la rete, vuole determinare un cammino minimo (tempo di viaggio) da Birmingham a Virginia Beach.



Flusso di costo minimo in cui il nodo 1 (Birmingham) ha supply 1, mentre il nodo 11 (Virginia Beach) ha domanda 1



- hzs : tempo di viaggio stimato
- pts : rating per la qualità scenica del percorso
(secondo obiettivo)

Problema decisionale: determinare un cammino di tempo minimo da 1 a 11

Modello P.L.:

19

$$\begin{aligned} \text{Min } & 2.5 x_{12} + 3 x_{13} + 1.7 x_{23} + 2.5 x_{24} + 1.7 x_{35} + \\ & + 2.8 x_{36} + 2 x_{46} + 1.5 x_{47} + 2 x_{56} + 5 x_{59} + \\ & + 3 x_{68} + 4.7 x_{69} + 1.5 x_{78} + 2.3 x_{7,10} + 2 x_{89} + \\ & + 1.1 x_{8,10} + 3.3 x_{9,11} + 2.7 x_{10,11} \end{aligned}$$

$$- x_{12} - x_{13} = -1$$

$$+ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$$

$$+ x_{13} + x_{23} - x_{35} - x_{36} = 0$$

$$+ x_{24} - x_{46} - x_{47} = 0$$

$$+ x_{35} - x_{56} - x_{59} = 0$$

$$+ x_{36} + x_{46} + x_{56} - x_{68} - x_{69} = 0$$

$$+ x_{47} - x_{7,8} - x_{7,10} = 0$$

$$+ x_{68} + x_{78} - x_{89} - x_{8,10} = 0$$

$$+ x_{59} + x_{69} + x_{89} - x_{9,11} = 0$$

$$+ x_{7,10} + x_{8,10} - x_{10,11} = 0$$

$$+ x_{9,11} + x_{10,11} = 1$$

modi
di
transito

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j)$$

Soluzione ottima (in figura): 11.5 ore
(e 15 punti)

Si può determinare il cammino più
pauzommo: 35 punti (mo 16 ore)

Proprietà integratā: se i bilanci ai nodi
sao interi (come nel problema di cammino
minimo) esiste un flusso ottimo a
componenti intero

Importante nelle applicazioni: es auto
ni (BMC)

Se si aggiungano vincoli ("side constraints"),
esempio determina il cammino più pauzo
unico dal nodo 1 al nodo 11 purchē
non ecceda le 14 ore di viaggio: non ē
detto che il modello PL restituisca una
soluzione intera (cammino)!

Occorre formulare un modello P.L.I.

< Esercitazione: ACA via Excel >

Il problema di trasporto

19"

(Cap. 3.10 Ragsdale)

- Problema di flusso di costo minimo su grafo bipartito

Topicum distribuisce agenzie (prodotti a base di)

Plantagium :

Dora : 275.000 unità di carico

Eustis : 400.000

Clermont : 300.000

Impianti di lavorazione :

Ocala : 200.000 (capacità di lavorazione)

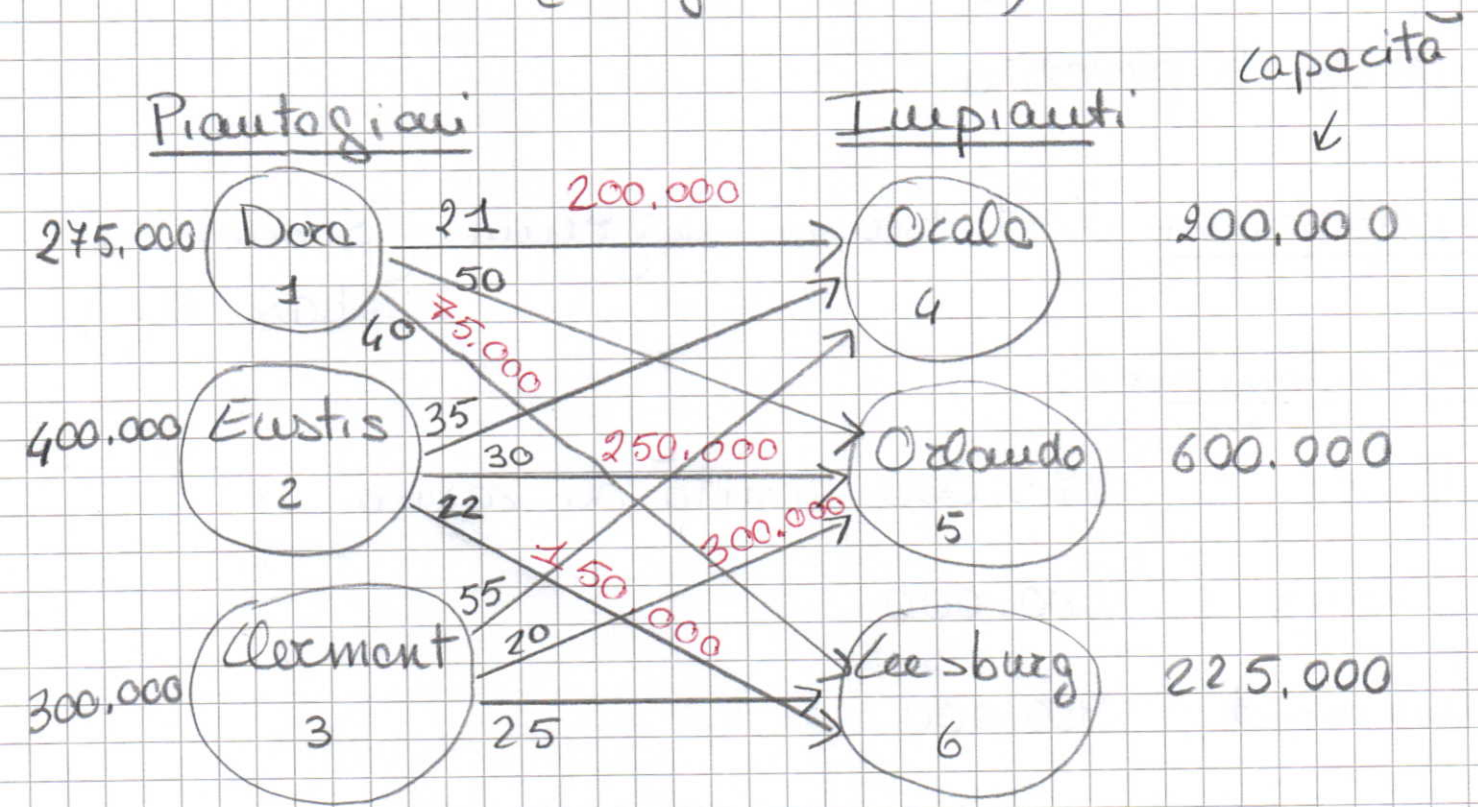
Orlando : 600.000

Leesburg : 225.000

Campagne di trasporto : costo per miglio

		Ocala	Orlando	Leesburg
<u>Distanza</u>	Dora	21	50	40
(in miglio)	Eustis	35	30	22
	Clermont	55	20	25

Problema decisionale: Tropicsun vuole decidere come trasportare le unità di carico dalle piantagioni agli impianti minimizzando il costo totale (miglio totali)



Variabili decisionali:

x_{ij} : numero unità di carico inviate da i a j , $\forall (i,j)$

Modello P.L. :

20

$$\begin{aligned} \text{Min } & 21 x_{14} + 50 x_{15} + 40 x_{16} + \\ & 35 x_{24} + 30 x_{25} + 22 x_{26} + \\ & 55 x_{34} + 20 x_{35} + 25 x_{36} \end{aligned}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 200.000$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \leq 600.000$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} \leq 225.000$$

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} = 275.000$$

$$x_{24} + x_{25} + x_{26} = 400.000$$

$$x_{34} + x_{35} + x_{36} = 300.000$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j)$$

Nota : $x_{14} + x_{15} + x_{16} = 275.000$

equivalente a

$$-x_{14} - x_{15} - x_{16} = -275.000$$

↑
supply (-)

vincoli di
conservazione del flusso

< Esercitazione: risoluzione di Tropicson
via EXCEL >

Soluzione ottima: in rosso sul grafo

Generalizzando:

Il modello di flusso di costo
minimo

Dato un grafo orientato $G = (N, A)$ con

- b_i bilancio al nodo i , $\forall i \in N$
- u_{ij} capacità del collegamento (i, j) ,
 $\forall (i, j) \in A$
- c_{ij} costo unitario di carico lungo (i, j) ,
 $\forall (i, j) \in A$

Variabili decisionali:

x_{ij} : quantità inviata lungo (i, j) ,
 $\forall (i, j) \in A$

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$(1) \quad \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad \forall i \in N$$

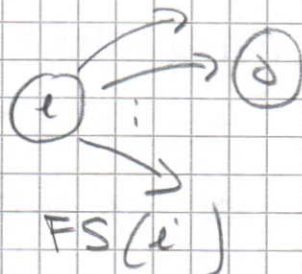
$$(2) \quad 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

In (1), vincoli di conservazione del flusso:

- $BS(i)$ stella entrante (backward star) di i



- $FS(i)$ stella uscente (forward star) di i



- b_i :

- < 0 supply node
- > 0 demand node
- $= 0$ nodo di trasferimento

(2) sono i vincoli di capacità

Condizione necessaria perché esista una

soluzione ammissibile : $\sum_{i \in N} b_i = 0$

Proprietà di integralità : se b_i sono interi,

$\forall i \in N$, e u_{ij} intero, $\forall (i,j) \in A$, allora
esiste un flusso ottimo a componenti intero

Casi speciali (già esemplificati)

① Il problema di cammino minimo
da $s \in N$ a $t \in N$ (es (ACA))

si ottiene dal modello di flusso di
costo minimo scegliendo:

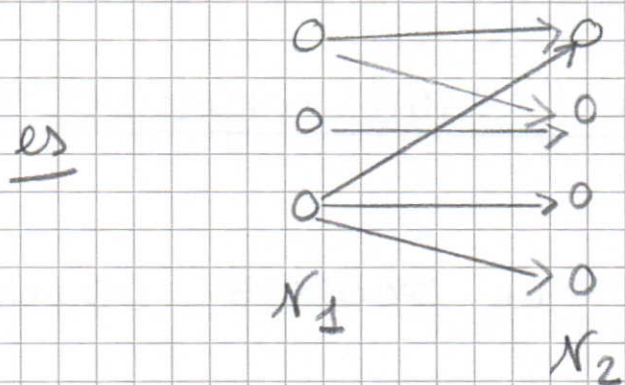
$$b_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ +1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $u_{ij} = +\infty \quad \forall (i,j) \in A$ (non
capacitato)

② Il problema di trasporto (es TropicSun)

caso speciale in cui:

- G è un grafo bipartito (N_1, N_2, A)



- $b_i < 0 \quad \forall i \in N_1$ (supply nodes)
- $b_i > 0 \quad \forall i \in N_2$ (demand nodes)

Importante: i problemi di flusso su rete "reali" si risolvono con algoritmi "ad hoc", molto efficienti

→ corso di Ricerca Operativa e
corso di Ottimizzazione su Rete

Proprietà: i problemi di flusso su rete studiano l'invio ottimale lungo una rete, dai nodi origine ai nodi destinazione, di un'unica tipologia di prodotto (es. auto in (BHE) e (AEA), aghi in TropicSun)



Problemi di flusso "single commodity"

In molte applicazioni, più prodotti vanno inviati lungo una stessa rete:

- se i prodotti (commodity) non interagiscono tra loro, allora si può risolvere un problema di flusso di costo minimo separato per commodity
- se i prodotti condividono invece le risorse della rete (capacità):

problemi di flusso "multicommodity"

esempio:

21"

- Airline scheduling: i veicoli sono i diversi tipi di aeromobili in una flotta aerea, ognuno con un proprio punto di partenza (nodo origine) e punto di destinazione (nodo destinazione)

Un modello di flusso "multicommodity"

Siano:

- $G = (N, A)$ grafo orientato (rete)
- K : numero delle commodity
- b_i^k : bilancio del nodo i relativo alla commodity k , $\forall i \in N, k = 1, \dots, K$
- u_{ij}^k : capacità del collegamento (i, j) per la commodity k , $\forall (i, j) \in A$, $k = 1, \dots, K$
- u_{ij} : capacità globale di (i, j) , $\forall (i, j) \in A$

c_{ij}^k : costo unitario di invio lungo (i,j) della commodity k , $\forall (i,j) \in A, k=1, \dots, K$

Variabili decisionali:

x_{ij}^k : quantità di commodity k inviate lungo (i,j) , $\forall (i,j) \in A, k=1, \dots, K$

Modello P.L.:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K c_{ij}^k x_{ij}^k$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k \quad \forall i \in N, k=1, \dots, K$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq u_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in A$$

$$k=1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

$$\forall (i,j) \in A$$

Nota : se non fossero presenti i vincoli

[- - -] potrei risolvere K problemi di

flusso di costo minimo indipendenti.

Supponiamo di dover anche progettare la rete di trasporto: posso inviare lungo (i, j) solo se prima attivo (costruisco, installo...) il collegamento (i, j) , pagando un costo fisso f_{ij} :

Modello di "fixed-charge" network design

Ulteriori dati di input:

f_{ij} : costo fisso per l'attivazione di (i, j) , $\forall (i, j) \in A$

Ulteriori variabili decisionali:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se attivo } (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A$$

Modello P.L.I.:

$$\text{Min} \underbrace{\sum_{(i,j) \in EA} f_{ij} y_{ij}}_{\text{costi fissi}} + \underbrace{\sum_{(i,j) \in EA} \sum_{k=1}^K c_{ij}^k \cdot x_{ij}^k}_{\text{costo di trasporto (routing)}}$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = b_i^k \quad \forall i \in N, \quad k=1, \dots, K$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{ij}^k &\leq u_{ij}^k & \forall (i,j) \in EA, \quad k=1, \dots, K \\ \left[\sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij} \cdot y_{ij} \right] & \forall (i,j) \in EA \\ y_{ij} &\in \{0, 1\} & \forall (i,j) \in EA \end{aligned}$$

I vincoli $\left[\sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq u_{ij} \cdot y_{ij} \right]$ sono ora sia vincoli di capacità che vincoli di legame tra le $\{x_{ij}^k\}$ e le $\{y_{ij}\}$ (linking constraint)

Complessità in tempo : NP-Hard

Algoritmi "ad hoc" (esatti / euristici):

→ corso di Ottimizzazione su rete