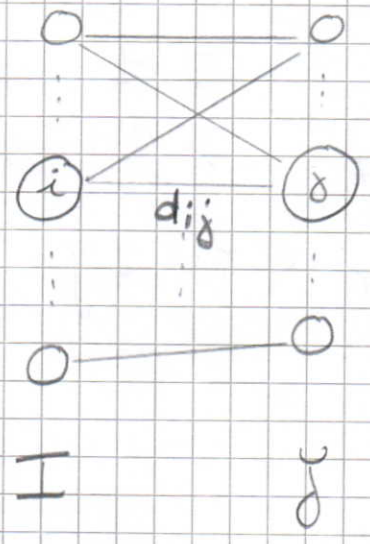
Modelli di localizzazione

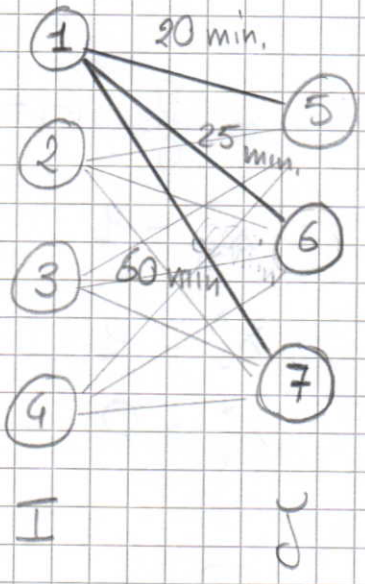
Esempi

$G = (I \cup J, E)$ Quello di rete logistica considerato (supponiamo per semplicità $I \cap J = \emptyset$)



x_j variabile di localizzazione

(1)



d_{ij}

	5	6	7
1	20	25	60
2	30	15	30
3	30	15	30
4	30	15	10

Supponiamo $D_c = 20$ min. distanza di copertura

$N_i = \{ j \in J : d_{ij} \leq 20 \text{ min} \}$

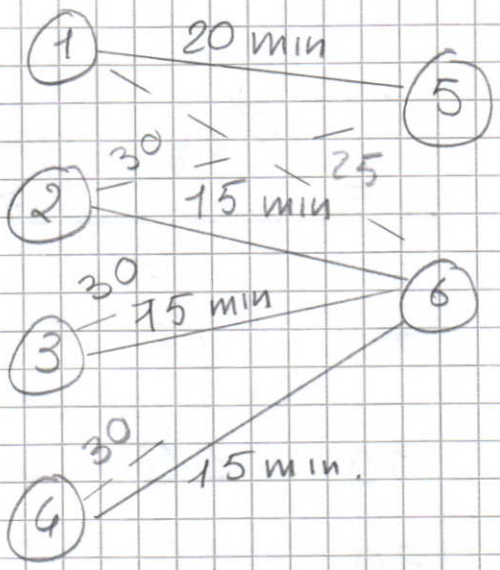
$N_1 = \{5\}$ $N_2 = N_3 = \{6\}$ $N_4 = \{6,7\}$

(SCLP) $\min\ x_5 + x_6 + x_7$

copertura modo 1	x_5	≥ 1	
" 2	x_6	≥ 1	
" 3	x_6	≥ 1	ridondante!
" 4	$x_6 + x_7$	≥ 1	

$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$

Una soluzione ottima:



2 facility aperte:

$x_5^* = 1$

$x_6^* = 1$

$x_7^* = 0$

NB: anche se la facility in (7) sarebbe stata più vicina per il modo domanda (4) (10 min. anziché 15 min): ma il requisito è non sforare la massima distanza D_C

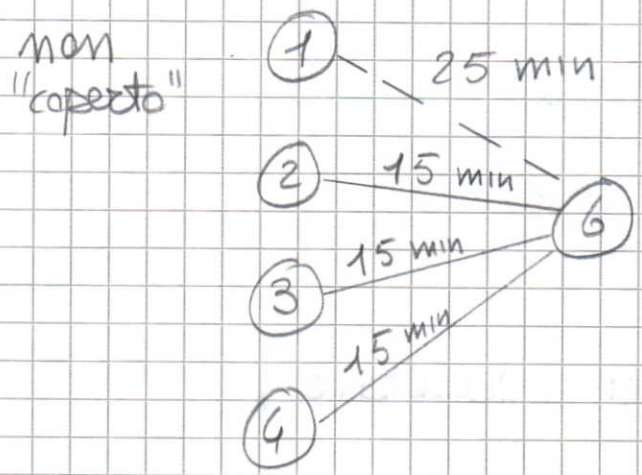
Supponiamo ora che, per motivi di budget, si possa aprire una sola facility: $p = 1$ (E1')

Voglio installare la facility in modo da "coprire" il maggior numero possibile di nodi domande (assumiamo $h_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$)

(MECLP) Max $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

$$x_5 \geq z_1$$
$$x_6 \geq z_2$$
$$x_6 \geq z_3$$
$$x_6 + x_7 \geq z_4$$
$$x_5 + x_6 + x_7 = 1 \quad (= p)$$
$$x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$
$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\}$$

da risolvere ottimo:



riesco a coprire 3 nodi domande

$x_6^* = 1 \quad x_5^* = x_7^* = 0$

$\Rightarrow z_1^* = 0$

z_2^*, z_3^* e z_4^* possono invece essere posti a

massimo valore, cioè 1

Supponiamo venga fornito anche uno distanza massima oltre cui il servizio non è accettabile: $D_m = 25$ min.

$M_1 = \{5,6\}$ $M_2 = M_3 = \{6\}$ $M_4 = \{6,7\}$

(MCLP) con vincoli di vicinanza:

$$\text{Max } z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

$$x_5 \geq z_1$$
$$x_6 \geq z_2$$
$$x_6 \geq z_3$$
$$x_6 + x_7 \geq z_4$$
$$x_5 + x_6 + x_7 = 1$$

nuovi vincoli:
$$x_5 + x_6 \geq 1$$
$$x_6 \geq 1$$
$$x_6 + x_7 \geq 1$$

$$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$$
$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0,1\}$$

La soluzione ottima non cambia!
(apro la facility nel nodo 6)

(2) Stessa istanza, ma $p = 2$: (E2)

Ora vogliamo minimizzare la massima distanza modo domanda - facility (supp. $h_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$)

(p-center) Min w

$$x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

allocazione

$$\begin{cases} y_{15} + y_{16} + y_{17} = 1 \\ y_{25} + y_{26} + y_{27} = 1 \\ y_{35} + y_{36} + y_{37} = 1 \\ y_{45} + y_{46} + y_{47} = 1 \end{cases}$$

$\forall i,k$ allocazione - localizzazione

$$\begin{cases} y_{15} \leq x_5 \\ y_{25} \leq x_5 \\ y_{35} \leq x_5 \\ y_{45} \leq x_5 \\ y_{16} \leq x_6 \\ \vdots \end{cases}$$

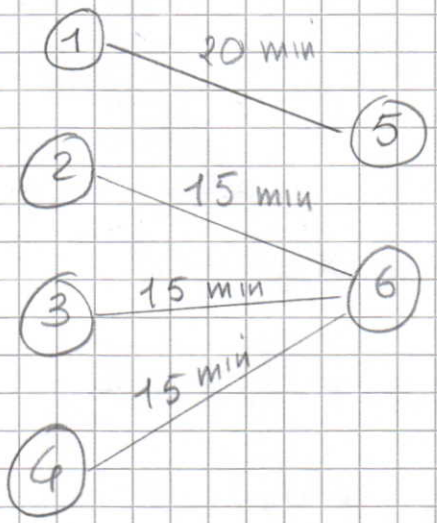
Massima distanza modo domanda - facility

$$\begin{cases} w \geq 20\, y_{15} + 25\, y_{16} + 60\, y_{17} \\ w \geq 30\, y_{25} + 15\, y_{26} + 30\, y_{27} \\ w \geq 30\, y_{35} + 15\, y_{36} + 30\, y_{37} \\ w \geq 30\, y_{45} + 15\, y_{46} + 10\, y_{47} \end{cases}$$

$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$

$y_{15}, y_{16}, y_{17}, y_{25} \ldots \in \{0,1\}$

La soluzione ottima:



$w^* = 20$ min.

$x_5^* = x_6^* = 1 \qquad x_7^* = 0$

$y_{15}^* = 1$

$y_{26}^* = 1$ (le altre y_{ij} a 0!)

$y_{36}^* = 1$

$y_{46}^* = 1$

Se invece $p = 1$, dovrei localizzare solo in (6) (massima distanza 25 min, contro 30 min (in (5)) e 60 min. (in (7))).

Se, per la stessa istanza, volessi aprire con distanze cambiate
$p=2$ facility, ma minimizzando il tempo totale di viaggio?

(E2')

	5	6	7
1	20	25	60
2	30	15	10 ←
3	30	15	10 ←
4	30	15	10

(p-median)

$$\text{Min } 20y_{15} + 25y_{16} + 60y_{17} + 30y_{25} + 15y_{26} + 10y_{27} \cdots$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

$$\begin{cases} y_{15} + y_{16} + y_{17} = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

allocazione (come prima)

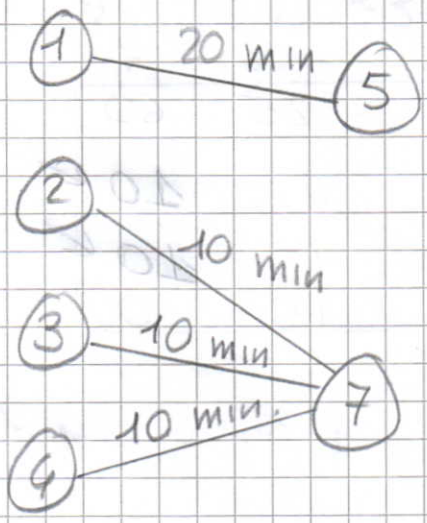
$$\begin{cases} y_{15} \leq x_5 \\ \vdots \end{cases}$$

link allocazione - localizzazione (come prima)

$$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$$

$$y_{15}, \cdots \in \{0,1\}$$

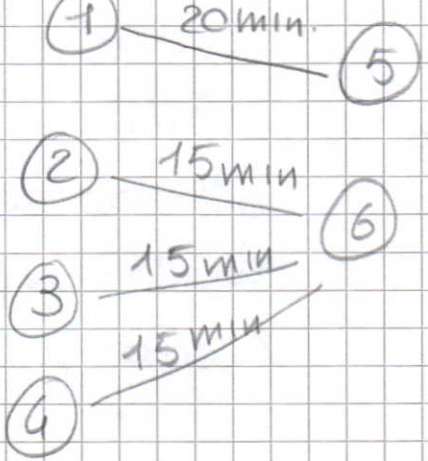
Ora la soluzione ottima diventa:



Distanza totale: 50 min.

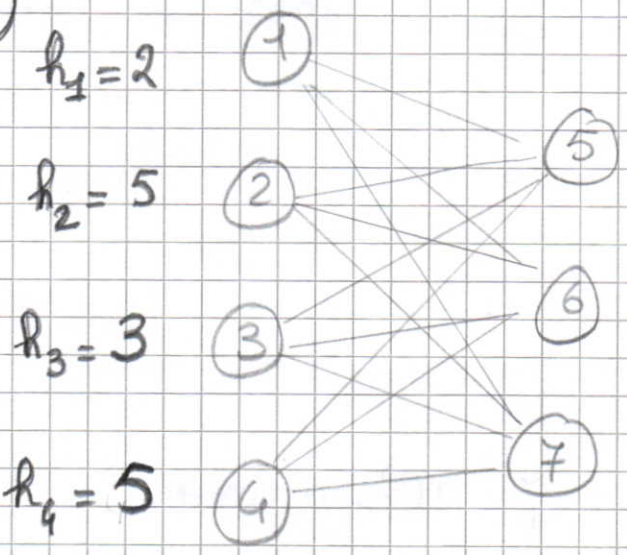
NB: è anche sol. ottima del corrispondente p-centro (max distanza: 20 min)

Però



è una soluzione ottima alternativa del p-centro, ma non del p-mediano (distanza totale: 65 min.)

(3)



(E3)

	5	6	7
1	20	25	60
2	30	15	10
3	30	15	10
4	30	15	10

d_{ij}

$c_5 = 10$ $c_6 = c_7 = 5$ capacità

Costi fissi $f_5 = 50$ $f_6 = f_7 = 100$

$\alpha = 1/\text{min}$ costo unitario di invio

Una soluzione ottima:

$h_1 = 2$ (1) — 20 min → (5) $c_5 = 10$

$h_2 = 5$ (2) — 30 min → (5)

$h_3 = 3$ (3) — 30 min → (5)

$h_4 = 5$ (4) — 10 min → (7) $c_7 = 5$

Costo totale

$50 +$
$100 +$
$40 + 150 + 80 + 50$
480

NB: i nodi 2 e 3 non sono più serviti dalla facility aperta più vicina (per i vincoli di capacità)

(FCLP)

costi fissi | costi di invio

$$\text{Min } 50 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 2 \cdot 20 \cdot y_{15} + 2 \cdot 25 \cdot y_{16} + 2 \cdot 60 \cdot y_{17} + \dots$$

$$\left.\begin{aligned} y_{15} + y_{16} + y_{17} &= 1 \\ y_{25} + y_{26} + y_{27} &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{ allocazione}$$

$$2 \cdot y_{15} + 5 \cdot y_{25} + 3 \cdot y_{35} + 5 \cdot y_{45} \leq 10 \cdot x_5$$

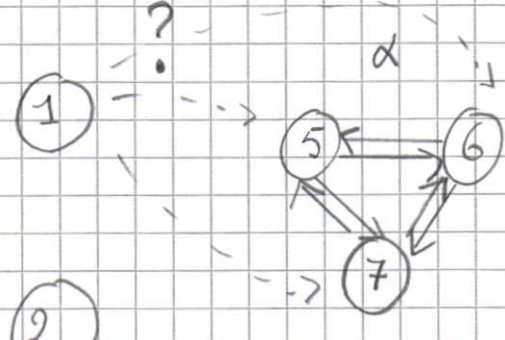
$$2 \cdot y_{16} + 5 \cdot y_{26} + 3 \cdot y_{36} + 5 \cdot y_{46} \leq 5 \cdot x_6$$

$$2 \cdot y_{17} + 5 \cdot y_{27} + 3 \cdot y_{37} + 5 \cdot y_{47} \leq 5 \cdot x_7$$

$$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$$

$$y_{15}, y_{25} \dots \in \{0,1\}$$

(4) Hub location model



$I = \{1, 2, 3, 4\}$

$J = \{5, 6, 7\}$

$h_{13} = 10$

$h_{ij} = 0$ altrimenti

$h_{24} = 20$

E_3'

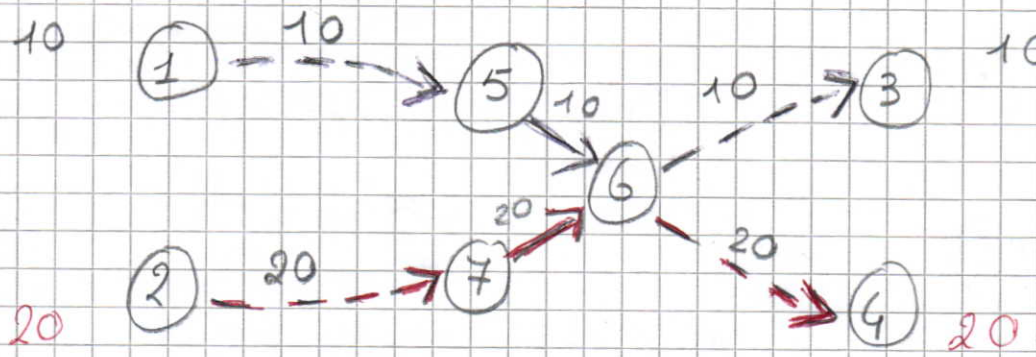
Supponiamo:

	5	6	7
1	1	100	100
2	100	100	1
3	100	1	100
4	100	1	100

$c_{ij}, \; i \in I, j \in J$

$c_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in J, \; i \neq j$ $\qquad \alpha = \frac{1}{10}$ fattore di scala

<u>Una soluzione ammissibile</u> (per $p = 3$):

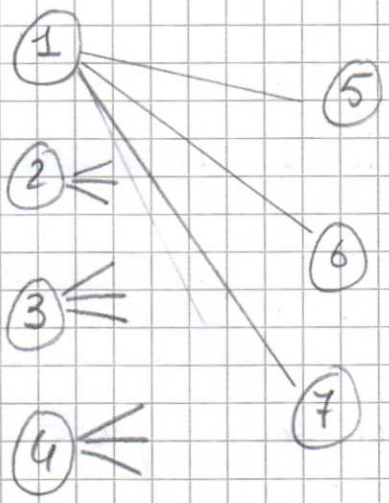


Costo: $10\left(1 + 1 + \frac{1}{10}\right) +$ coppia (1, 3)

$+ 20\left(1 + 1 + \frac{1}{10}\right)$ coppia (2, 4)

$= 30 \cdot \frac{21}{10} = 21 \cdot 3 = 63$

(5) **Maxisum location**

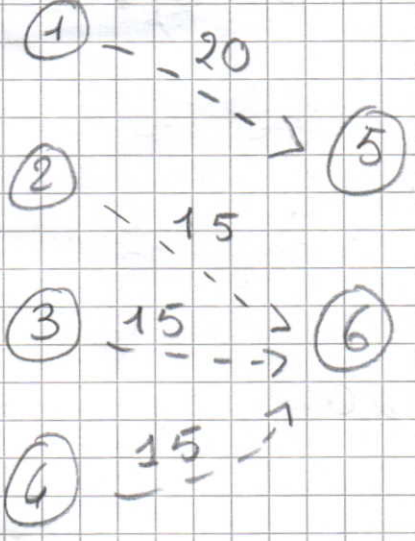


	5	6	7
1	20	25	60
2	30	15	10
3	30	15	10
4	30	15	10

$p = 2$: stesso istanza del p-median

$h_i = 1 \quad \forall i \in I$

Una soluzione ottima:



Distanza totale:

65 min

(va considerato la facility più vicina "tra quelle aperte") è la più pericolosa

Se apro $u_i \{5,7\}$: $20 + 10 + 10 + 10 = 50$ min

Se apro $u_i \{6,7\}$: $25 + 10 + 10 + 10 = 55$ min.

Ora deve massimizzare!

E4

Dati di input (rielaborati):

modo 1: $[1]_1 = 5$ $[1]_2 = 6$ $[1]_3 = 7$

$[1]_1$: la più vicina al modo 1

$[1]_2$: la seconda

$[1]_3$: la terza

modo 2: $[2]_1 = 7$ $[2]_2 = 6$ $[2]_3 = 5$

(= modo 3 = modo 4)

Comunque apra $p=2$ facility, deve capire qual è la più vicina a i, cioè la più pericolosa (ovvero <u>la più critica</u>), e massimizzare la distanza totale (o media)

Max $20\,y_{15} + 25\,y_{16} + 60\,y_{17} + 30\,y_{25} + 15\,y_{26} + 10\,y_{27}$

$+ \circ\circ\circ\circ\circ\circ$

$x_5 + x_6 + x_7 = 2$

$y_{15} + y_{16} + y_{17} = 1$

$y_{25} + y_{26} + y_{27} = 1$

$y_{35} + y_{36} + y_{37} = 1$

$y_{45} + y_{46} + y_{47} = 1$

} vincoli di "allocazione"

$y_{15} \geq x_5$

$y_{15} + y_{16} \geq x_6$

$y_{15} + y_{16} + y_{17} \geq x_7$

} vincoli "vicinanza" modo 1

$y_{27} \geq x_7$

$y_{27} + y_{26} \geq x_6$

$y_{27} + y_{26} + y_{25} \geq x_5$

} vincoli "vicinanza" modo 2

$\vdots$

analoghi per modo 3 e modo 4

$y_{15} \leq x_5$

$y_{16} \leq x_6$

$\vdots$

} "linking constraints"

$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$

$y_{ij} \in \{0,1\}$ $i = 1,2,3,4$ $j = 5,6,7$

Se si volesse una soluzione più equa, ovvero si volesse massimizzare la minima "distanza critica"?

(E'4)

$$\text{Max } w$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = 2$$

[allocazione]

[vicinanza]

[ranking]

$$w_1 \leq 20\,y_{15} + 25\,y_{16} + 60\,y_{17}$$

$$\begin{cases} w_1 \leq 20\,y_{15} \\ w_1 \leq 25\,y_{16} \\ w_1 \leq 60\,y_{17} \end{cases}$$

w_1 stima per difetto distanza critica modo 1

$$w_2 \leq 30\,y_{25} + 15\,y_{26} + 10\,y_{27}$$

$$\begin{cases} w_2 \leq 30\,y_{25} \\ w_2 \leq 15\,y_{26} \\ w_2 \leq 10\,y_{27} \end{cases}$$

w_2 stima per difetto distanza critica modo 2

$$w_3 \leq 30\,y_{35} + 15\,y_{36} + 10\,y_{37}$$

$$\begin{cases} w_3 \leq 30\,y_{35} \\ w_3 \leq 15\,y_{36} \\ w_3 \leq 10\,y_{37} \end{cases}$$

w_3 stima per difetto distanza critica modo 3

$$w_4 \leq \begin{cases} w_4 \leq 30\, y_{45} \\ w_4 \leq 15\, y_{46} \\ w_4 \leq 10\, y_{56} \end{cases}$$

$30 y_{45} + 15 y_{46} + 10 y_{47}$

w_4 stima per difetto distanza critica nodo 4

$$\begin{cases} w \leq w_1 \\ w \leq w_2 \\ w \leq w_3 \\ w \leq w_4 \end{cases}$$

w stima per difetto la minima distanza critica

$x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$

$y_{15}, \ldots \in \{0,1\}$

È possibile definire modelli P.L.I. "più semplici" per Maximum Location?