

Ogni macchina può fare il lavoro
di cento uomini normali,
ma nessuna macchina può fare
il lavoro di un uomo straordinario.

Elbert Hubbard

1.1 INTRODUZIONE

Per l'inderogabile necessità di aumentare la produzione e di incrementare la consegna di prodotti finiti di qualità uniforme, l'industria si orienta in sempre maggior misura verso l'automazione basata sui calcolatori. Oggi la maggior parte dei lavori nell'industria automatizzata è espletata da macchine per impieghi speciali deputate all'esecuzione di funzioni predefinite in un unico procedimento di fabbricazione. La scarsa elasticità di impiego e il costo generalmente alto di queste macchine, spesso chiamate *hard automation systems* (sistemi rigidi di automazione), hanno portato a un maggior interesse per l'uso di robot in grado di effettuare un'ampia gamma di funzioni industriali operando in un ambito di lavoro più flessibile e a costi di produzione inferiori.

Il termine *robot* deriva dalla parola di origine cecoslovacca *robota*, che significa lavoro. Il dizionario Webster definisce il robot come "un dispositivo automatico che esegue funzioni normalmente svolte dagli esseri umani". Con questa definizione anche le lavabiancheria potrebbero essere considerate robot. Una definizione usata dal Robot Institute of America fornisce una descrizione più appropriata dei robot industriali: "Un robot è un manipolatore *multifunzionale riprogrammabile* progettato per spostare materiali, parti, utensili o dispositivi specializzati, per mezzo di movimenti variabili programmati per l'esecuzione di un dato numero di compiti". In breve, un robot è un manipolatore riprogrammabile, per impieghi generali, con sensori esterni, in grado di eseguire varie funzioni di assemblaggio. Con questa definizione, un robot deve possedere *intelligenza*, che è solitamente da ricercare negli algoritmi associati ai suoi sistemi di controllo e ai suoi sensori.

Un robot industriale è un manipolatore per impieghi generali controllato da calcolatore, che consiste in un certo numero di parti rigide (link), unite l'una all'altra per mezzo di giunti rotatori o di traslazione. Un'estremità della serie è connessa a una base di appoggio, mentre l'altra estremità è libera e dotata di un utensile per manipolare oggetti o per effettuare compiti di assemblaggio. Il movimento dei giunti deriva dal movimento relativo dei link. Dal punto di vista meccanico, un robot è composto da un braccio (o sistema principale) e da un sottogruppo del polso più un attrezzo (o progettato per raggiungere un pezzo della lavorazione situato nel suo spazio di lavoro. Tale spazio è la sfera di influenza di un robot, il cui braccio può portare il sottogruppo del polso a qualsivoglia punto all'interno della sfera. Il sottogruppo del braccio generalmente può spostarsi con tre gradi di libertà. La combinazione dei movimenti posiziona l'unità del polso a livello del pezzo con cui si lavora. L'unità del sottogruppo del polso permette solitamente tre movimenti rotazionali. La combinazione di questi orienta la pinza in base alla configurazione dell'oggetto per permetterne con facilità la presa. Questi ultimi tre movimenti sono spesso chiamati *pitch*, *yaw* e *roll* (beccheggio, imbardata e rollio). Dunque, per un robot a sei giunti, il sottogruppo del braccio è il meccanismo di posizionamento mentre il sottogruppo del polso è il meccanismo di orientazione. Questi concetti sono illustrati dal robot Cincinnati Milacron T^3 e dal braccio del robot Unimation PUMA osservabili nella Figura 1.1.

Molti robot industriali reperibili commercialmente sono largamente usati nei compiti di fabbricazione e di assemblaggio, come manipolazione di materiali, saldatura a punti e ad arco, assemblaggio di parti, verniciatura a spruzzo, carico e scarico di macchine a controllo numerico, esplorazioni spaziali e sottomarine, ricerca sugli arti artificiali, e manipolazione di materiali pericolosi. Questi robot appartengono a una delle quattro categorie fondamentali della definizione del moto (Figura 1.2):

1. Coordinate cartesiane (tre assi lineari) (per esempio il robot IBM RS-1 e l'Olivetti Sigma).
2. Coordinate cilindriche (due assi lineari e uno rotazionale) (per esempio il robot Versatran 600 della Prab).
3. Coordinate sferiche (un asse lineare e due rotazionali) (per esempio il robot Unimate 2000B della Unimation Inc.).
4. Coordinate rotazionali o articolate (tre assi rotazionali) (per esempio il T^3 della Cincinnati Milacron e il PUMA della Unimation Inc.).

Quasi tutti i robot industriali odierni, anche se controllati da mini- e micro-calcolatori, sono fondamentalmente semplici macchine per il posizionamento. Esse svolgono un dato compito eseguendo sequenze di moto preprogrammate e/o preprogrammate che sono state precedentemente fatte eseguire

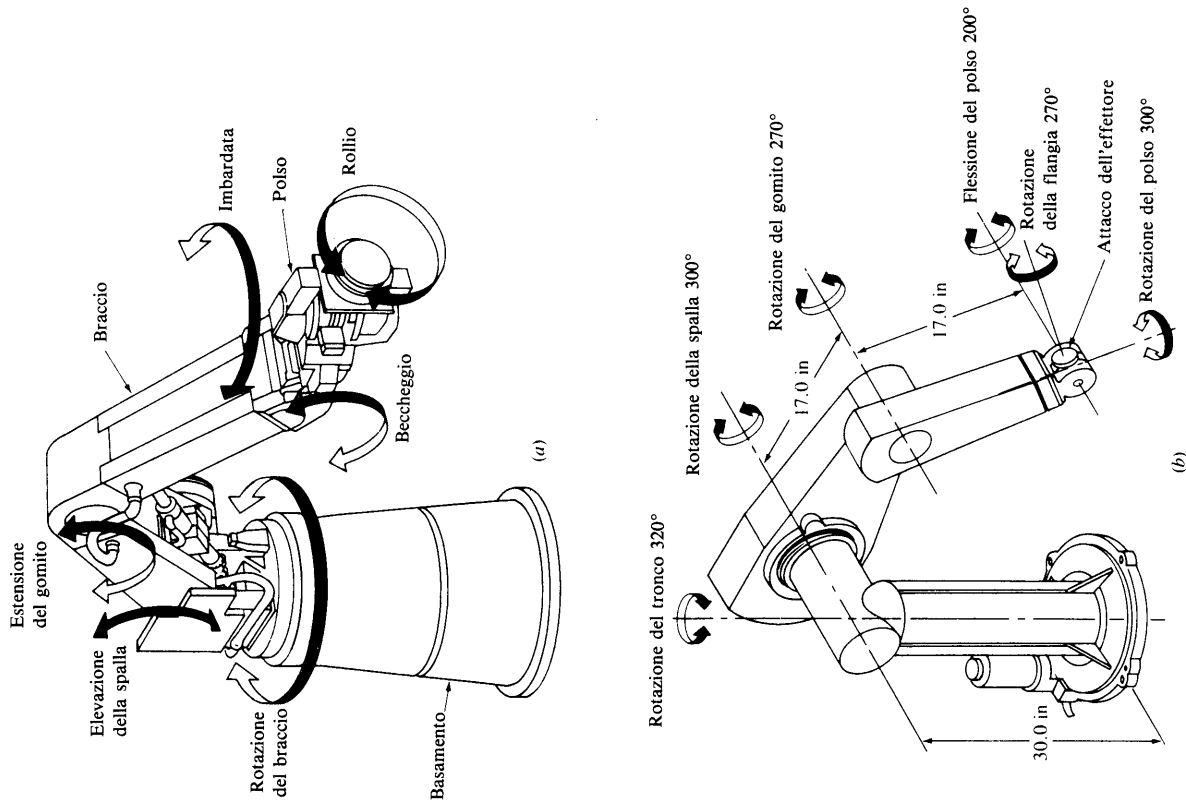


Figura 1.1 (a) Braccio del robot Cincinnati Milacron T^3 . (b) Braccio dei robot serie PUMA 560.

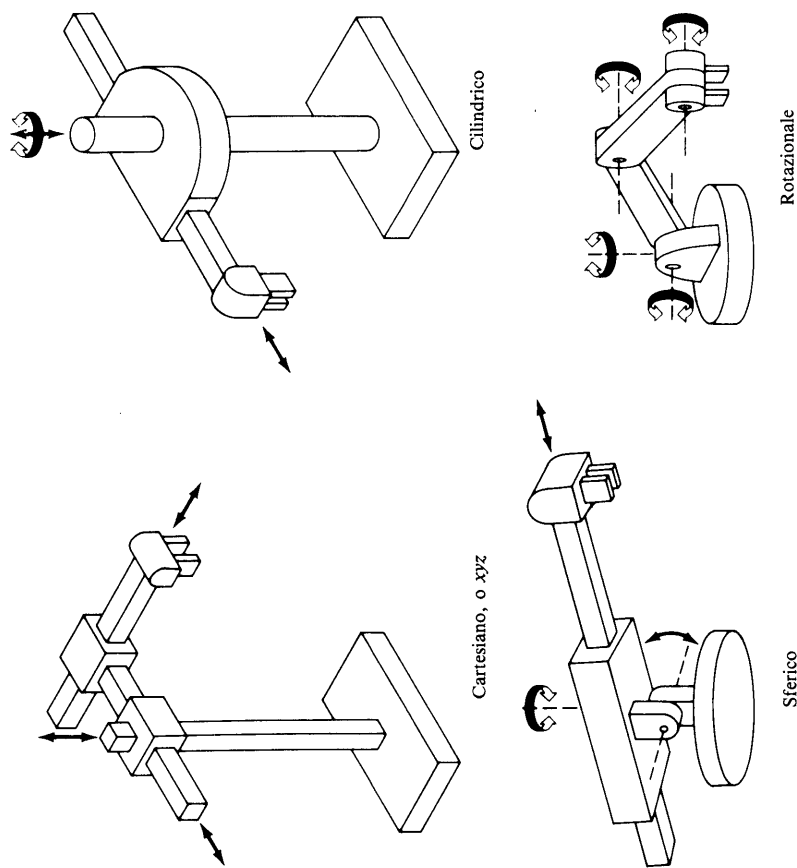


Figura 1.2 Categorie di braccio per robot.

manualmente o insegnate da un operatore mediante una apposita scatola di programmazione. Inoltre, questi robot sono dotati di pochi o di nessun sensore esterno per ottenere le indicazioni necessarie a operare nel loro ambito lavorativo. Di conseguenza i robot sono utilizzati principalmente per lavori relativamente semplici e ripetitivi. Oggi la ricerca è diretta verso il miglioramento delle prestazioni globali dei sistemi manipolatori, attraverso lo studio delle diverse aree di interesse coperte dal presente volume.

1.2 SVILUPPI STORICI

Il termine *robot* è stato introdotto nella lingua inglese nel 1921 dal commediografo Karel Capek nel suo dramma satirico, *R.U.R.* (i robot universali

di Rossum). In quest'opera i robot sono macchine che assomigliano agli uomini, ma lavorano instancabilmente. Inizialmente, i robot erano stati costruiti a scopo di profitto per sostituire gli operai ma, verso la fine del dramma, essi si rivoltano contro i loro creatori, distruggendo l'intera razza umana. L'opera di Capek è grandemente responsabile di alcuni dei luoghi comuni ancora oggi esistenti, fra cui il pensare ai robot come macchine umanoidi dotate di intelligenza e personalità individuali. Questa immagine è stata rinforzata dal film tedesco del 1926 *Metropolis*, dal robot ambulante Elektro e il suo cane Sparko, presentati, nel 1939 alla Fiera Mondiale di New York, e più recentemente dal robot C3PO creato nel 1977 per il film *Guerre Stellari*. I moderni robot industriali appaiono certamente primitivi se paragonati alle aspettative create dai mezzi di comunicazione di massa nelle sei ultime decadi.

I primi lavori che hanno portato agli odierni robot industriali possono essere collocati nel periodo immediatamente successivo alla seconda guerra mondiale. Alla fine degli anni Quaranta iniziarono programmi di ricerca agli Oak Ridge e Argonne National Laboratories per lo sviluppo di manipolatori meccanici con controllo a distanza per la manipolazione di materiali radioattivi. Questi sistemi erano del tipo "master-slave", progettati per riprodurre fedelmente i movimenti della mano e del braccio eseguiti da un operatore umano. Un operatore faceva compiere al manipolatore master una sequenza di movimenti, mentre il manipolatore slave imitava l'unità master nel modo più esatto possibile. Più tardi venne aggiunta la reazione di forza accoppiando meccanicamente i movimenti del master e dell'unità slave cosicché l'operatore potesse percepire lo sviluppo delle forze tra il manipolatore slave e il suo ambiente. Nella metà degli anni Cinquanta l'accoppiamento meccanico è stato sostituito da attuatori elettrici e idraulici nei manipolatori come l'Handyman della General Electric e il Minotaur I costruito dalla General Mills.

Al lavoro sui manipolatori master-slave seguirono rapidamente sistemi più sofisticati in grado di effettuare operazioni autonome, ripetitive. Nella metà degli anni Cinquanta George C. Devol sviluppò un dispositivo chiamato "dispositivo di trasferimento articolato programmato", un manipolatore il cui compito poteva essere programmato (e in tal modo cambiato) e che poteva eseguire una sequenza di movimenti determinata dalle istruzioni immesse nel programma. Un ulteriore sviluppo di questo concetto di Devol e Joseph F. Engelberger portò al primo robot industriale, presentato dalla Unimation Inc. nel 1959. La chiave di questo dispositivo era l'uso di un calcolatore in associazione a un manipolatore per produrre una macchina che potesse "imparare" a eseguire automaticamente vari compiti. Diversamente dalle macchine ad automazione rigida, questi robot potrebbero essere riprogrammati e riattrezzati a un costo relativamente basso per effettuare compiti diversi connessi ai cambiamenti nelle esigenze di fabbricazione.

Mentre i robot programmati hanno costituito uno strumento innovativo e potente per la fabbricazione, divenne evidente negli anni Sessanta che la duttilità di queste macchine poteva essere aumentata sensibilmente con l'uso di sensori. All'inizio di quella decade, H.A. Ernst [1962] descrisse lo sviluppo di una mano meccanica controllata da calcolatore, dotata di sensori tattili. Questo dispositivo poteva "sentire" gli oggetti e utilizzava questa informazione per controllare la mano in modo da riuscire ad accatastare tali oggetti senza l'assistenza dell'operatore. Questo lavoro è uno dei primi esempi di robot in grado di comportarsi in modo adattativo in un ambiente ragionevolmente non strutturato. Il manipolatore consisteva in un ANL Model-8 a sei gradi di libertà controllato da un calcolatore TX-O attraverso un dispositivo di interfaccia. Questo programma di ricerca più tardi venne sviluppato come parte del progetto MAC, e si aggiunse una telecamera al manipolatore per iniziare la ricerca sulla percezione delle macchine. Durante lo stesso periodo, Tomovic e Boni [1962] svilupparono il prototipo di una mano dotata di un sensore di pressione che percepiva l'oggetto e forniva un segnale a un motore, permettendogli di scegliere fra due diverse sequenze di presa. Una volta che la mano era a contatto con l'oggetto, le informazioni relative alla forma e al peso dell'oggetto erano inviate al calcolatore da questi elementi sensibili alla pressione. Nel 1963, la American Machine and Foundry Company (AMF) presentò il robot commerciale VERSATRAN. A partire dallo stesso anno, furono sviluppati diversi progetti di braccio per manipolatore, come il braccio di Roehampton e quello di Edinburgh.

Alla fine degli anni Sessanta, McCarthy [1968] e colleghi dello Stanford Artificial Intelligence Laboratory descrissero lo sviluppo di un calcolatore dotato di mani, occhi e orecchie (cioè manipolatori, telecamere e microfoni). Il sistema riconosceva messaggi orali, "vedeva" blocchi disseminati su un tavolo e li manipolava secondo le istruzioni. Durante questo periodo, Pieper [1968] studiò il problema cinematico di un manipolatore controllato da calcolatore mentre Kahn e Roth [1971] analizzarono la dinamica e il controllo di un braccio vincolato, utilizzando il controllo bang-bang (proprio al tempo minimo).

Nello stesso periodo, altri paesi (in particolare il Giappone) cominciarono a intravedere le potenzialità dei robot industriali. Già nel 1968 la compagnia giapponese Kawasaki Heavy Industries acquisiva una licenza dalla Unimation per i suoi robot. Uno degli sviluppi più insoliti nel campo dei robot è avvenuto nel 1969, quando un autocarro semovente sperimentale venne costruito dalla General Electric Company per l'esercito degli USA. Nello stesso anno venne creato il braccio di Boston, e negli anni seguenti il braccio di Stanford, che era dotato di una telecamera e di un calcolatore di controllo. Alcuni dei lavori più seri nel campo della robotica sono iniziati non appena questi bracci furono usati come manipolatori. Un esperi-

rimento con il braccio di Stanford consisteva nell'accatastare automaticamente dei blocchetti secondo vari criteri: si trattava di un lavoro molto sofisticato per un robot automatico di quei tempi. Nel 1974 la Cincinnati Milacron presentava il suo primo robot industriale controllato da calcolatore. Chiamato "The Tomorrow Tool", o T^3 , poteva sollevare oltre 50 kg e seguire oggetti in movimento su una linea di assemblaggio.

Durante gli anni Settanta moltissimi lavori di ricerca si sono concentrati sull'uso di sensori esterni per facilitare le operazioni manipolatorie. A Stanford, Bolles e Paul [1973], utilizzando il feedback visivo e quello della forza, hanno sviluppato un braccio Stanford associato a un calcolatore PDP-10 per assemblare pompe idrauliche per autoveicoli. Intorno allo stesso periodo, Will e Grossman [1975] dell'IBM hanno descritto un manipolatore controllato da calcolatore dotato di sensori tattili e di forza per l'assemblaggio di una macchina per scrivere costituita da 20 parti. Inoue [1974] al MIT Artificial Intelligence Laboratory ha lavorato sull'intelligenza artificiale applicata alla reazione di forza. Per effettuare il posizionamento iniziale in un lavoro di assemblaggio di precisione usò la tecnica di ricerca della rotta di atterraggio. Al Draper Laboratory, Nevins et al. [1974] hanno studiato le tecniche della percezione basandosi sulla cedevolezza. Il risultato di questo lavoro è stato la sensorializzazione di un dispositivo passivo, chiamato *remote center compliance* (RCC), montato sull'ultimo giunto del manipolatore per l'assemblaggio di parti con accoppiamento stretto. Bejczy [1974], al Jet Propulsion Laboratory, applicò al suo braccio di Stanford modificato una tecnica di controllo dei movimenti basata sul calcolatore per affrontare progetti di esplorazione spaziale. Da allora sono stati proposti diversi metodi per il controllo di manipolatori meccanici.

Oggi, la robotica è vista in un contesto molto più ampio rispetto a quello considerato appena pochi anni fa, e comprende la ricerca e lo sviluppo in un certo numero di aree interdisciplinari fra cui la cinematica, la dinamica, i sistemi di pianificazione, il controllo, la percezione, i linguaggi di programmazione e l'intelligenza artificiale. Tali argomenti, presentati sinteticamente nei prossimi paragrafi, costituiscono il nucleo della trattazione di questo volume.

1.3 CINEMATICA E DINAMICA DEL BRACCIO DI UN ROBOT

La cinematica del braccio dei robot si occupa dello studio analitico della geometria del moto del braccio rispetto a un sistema di riferimento cartesiano fisso senza considerare le forze e i momenti che ne provocano il moto. La cinematica descrive quindi analiticamente lo spostamento del robot

nello spazio in funzione del tempo e, in particolare, le relazioni tra le posizioni dei giunti e la posizione e l'orientamento dell'effettore del braccio del robot.

Vi sono due problemi fondamentali nella cinematica del braccio del robot. Il primo è solitamente detto il problema della *trasformazione cinematica diretta*, mentre il secondo è il problema della *trasformazione cinematica inversa* (o soluzione del braccio). Dato che le variabili indipendenti nel braccio di un robot sono le variabili dei giunti, e che il lavoro da compiere è solitamente espresso in termini del sistema di coordinate di riferimento, il problema della trasformazione cinematica inversa è quello più importante. Denavit e Hartenberg [1955] hanno proposto un metodo sistematico e generalizzato di utilizzo dell'algebra matriciale per descrivere e rappresentare la geometria spaziale dei segmenti del braccio di un robot rispetto a un sistema di riferimento fisso. Questo metodo utilizza una matrice di trasformazione omogenea 4×4 per rappresentare la relazione spaziale tra due segmenti meccanici rigidi adiacenti, e riduce il problema della trasformazione cinematica diretta alla ricerca di una matrice di trasformazione omogenea 4×4 che metta in relazione lo spostamento nello spazio del sistema di coordinate della mano col sistema di riferimento. Queste matrici di trasformazione omogenea sono utili anche per derivare le equazioni dinamiche del moto del braccio di un robot. In generale, il problema della cinematica inversa può essere risolto attraverso varie tecniche. I metodi di più comune impiego sono l'approccio algebrico matriciale, quello iterativo e quello geometrico. Nel Capitolo 2 sono contenute trattazioni dettagliate riguardanti i problemi delle trasformazioni cinematiche diretta e inversa.

La dinamica del braccio, d'altra parte, si occupa della formulazione matematica delle equazioni di moto del braccio. Le equazioni dinamiche del moto di un manipolatore sono costituite da un set di equazioni matematiche che descrivono il comportamento dinamico del manipolatore. Tali equazioni di moto sono utili per la simulazione al computer del moto del braccio, per il progetto delle equazioni di controllo utilizzabili per il braccio del robot e per la valutazione della progettazione e della struttura cinematica del braccio. Il modello dinamico effettivo di un braccio può essere ottenuto da leggi fisiche note quali le leggi della meccanica di Newton e di Lagrange. Ciò porta allo sviluppo di equazioni dinamiche del moto per i diversi giunti articolati del manipolatore in termini di parametri geometrici e inerziali dei segmenti. Gli approcci convenzionali come le formulazioni di Lagrange-Eulero e di Newton-Eulero possono essere allora applicati sistematicamente per sviluppare le effettive equazioni di moto del braccio di un robot. Nel Capitolo 3 sono presentate trattazioni sulla dinamica del braccio del robot.

1.4 PIANIFICAZIONE DELLA TRAIETTORIA DEL MANIPOLATORE E CONTROLLO DEL MOTO

Con la conoscenza della cinematica e della dinamica di un manipolatore costituito da un insieme di segmenti, per eseguire un determinato lavoro si vorrebbero utilizzare gli attuatori dei giunti del manipolatore controllando che quest'ultimo segua un percorso desiderato. Prima di spostare il braccio del robot, è importante sapere se sono presenti ostacoli sul percorso che il braccio deve effettuare (vincolo degli ostacoli) e se la mano del manipolatore deve spostarsi lungo un determinato percorso (vincolo del percorso). Di conseguenza, il problema del controllo di un manipolatore può essere convenientemente ripartito in due sottoproblemi: il sottoproblema della pianificazione del moto (o traiettoria) e il sottoproblema del controllo del moto. La curva nello spazio lungo la quale si sposta la mano del manipolatore da uno stato iniziale (posizione e orientamento) allo stato finale viene chiamata *percorso*. Il calcolo della traiettoria (o pianificatore della traiettoria) intercala e/o approssima il percorso desiderato tramite funzioni polinomiali e genera una sequenza di "set points" per il controllo del manipolatore dallo stato iniziale a quello finale. Il Capitolo 4 tratta diversi procedimenti per la pianificazione della traiettoria per il movimento libero da ostacoli, e il formalismo per rappresentare il movimento desiderato del manipolatore in termini di sequenze di punti nello spazio attraverso i quali deve passare il manipolatore e la curva percorsa nello spazio.

In generale, il problema del controllo del moto consiste in (1) ottenere modelli dinamici del manipolatore, e (2) utilizzare questi modelli per determinare le leggi o le strategie di controllo per ottenere la risposta e le prestazioni desiderate dal sistema. La prima parte del problema del controllo è trattata diffusamente nel Capitolo 3, mentre il Capitolo 5 è incentrato sulla seconda parte del problema del controllo. Dal punto di vista dell'analisi del controllo, il movimento del braccio è solitamente effettuato in due fasi distinte. La prima è il controllo a grande scala del moto in cui il braccio si sposta da una posizione/orientamento iniziale in prossimità della posizione/orientamento desiderato del bersaglio lungo una traiettoria pianificata. Il secondo è il controllo fine del moto in cui l'estremità dell'effettore del braccio interagisce dinamicamente con l'oggetto utilizzando le indicazioni provenienti dai sensori per completare il lavoro.

I metodi industriali odierni per il controllo del braccio del robot considerano ogni giunto del braccio come un semplice servomeccanismo. Questo approccio modella in modo inadeguato le variazioni di dinamica del manipolatore perché trascura il movimento e la configurazione dell'intero meccanismo del braccio. Queste variazioni nei parametri del sistema controllato talvolta sono sufficientemente significative da rendere inefficaci le strategie di controllo convenzionali. Il risultato è una riduzione della velocità di ri-

sposta e dello smorzamento, con conseguente limitazione della precisione e della velocità dell'effettore che lo rendono adeguato solo per compiti in cui si richieda una precisione limitata. I manipolatori così controllati si muovono a basse velocità con vibrazioni superflue. Ogni significativo incremento di prestazioni in questa e in altre aree del controllo del braccio del robot richiede di considerare modelli dinamici più efficienti, metodi di controllo sofisticati, l'uso di architetture hardware dedicate e tecniche di elaborazione parallele. Il Capitolo 5 è incentrato sulla derivazione delle leggi di controllo del moto a grande scala e sulle strategie che utilizzano i modelli dinamici trattati nel Capitolo 3 per controllare efficacemente un manipolatore.

1.5 PERCEZIONE DEL ROBOT

L'uso di meccanismi per la percezione dell'ambiente esterno permette al robot di interagire con il suo ambiente in modo elastico. Questo è in contrasto con le operazioni preprogrammate nelle quali a un robot viene "insegnato" come effettuare compiti ripetitivi mediante un insieme di funzioni programmate. Sebbene quest'ultimo modo di operare sia di gran lunga predominante negli attuali robot industriali, l'uso della tecnologia della percezione per macchine dotate di un livello più alto di intelligenza nell'interazione col loro ambiente è un tema aperto nella ricerca e nello sviluppo in campo robotico. La funzione dei sensori di un robot può essere ripartita in due categorie principali: *stato interno* e *stato esterno*. I sensori dello stato interno si occupano della ricerca di variabili come la posizione del giunto del braccio che sono utilizzate per il controllo del robot. I sensori dello stato esterno invece si occupano della valutazione di variabili come distanza, prossimità e contatto. La percezione esterna, argomento dei Capitoli dal 6 all'8, è utilizzata per la guida dei robot e anche per l'identificazione e la manipolazione degli oggetti. Il tema del Capitolo 6 è la percezione della distanza, della prossimità, del contatto e della forza-momento. I sensori e le tecniche della visione sono trattati dettagliatamente nei Capitoli 7 e 8. Nonostante la percezione della prossimità, del contatto e della forza abbiano un ruolo significativo nel miglioramento delle prestazioni del robot, la vista è riconosciuta come la più importante delle capacità sensoriali del robot. La vista del robot può essere definita come il processo di estrazione, caratterizzazione e interpretazione delle indicazioni delle immagini di un universo tridimensionale. Questo processo, comunemente chiamato anche *machine vision* o *computer vision*, può essere ripartito in sei aree principali: (1) percezione, (2) preelaborazione, (3) segmentazione, (4) descrizione, (5) riconoscimento e (6) interpretazione. È conveniente raggruppare queste diverse aree del processo visivo in base alla sofisticazione implicita nella loro effettuazione. Consideriamo tre livelli di

elaborazione: visione a basso, medio e ad alto livello. Mentre non vi sono barriere nette tra queste suddivisioni, esse forniscono una struttura utile per la categorizzazione dei diversi processi che compongono il sistema visivo di una macchina. Nella nostra trattazione considereremo la percezione e la preelaborazione come visione di basso livello. Ciò ci porterà dal processo stesso della formazione dell'immagine alle compensazioni quali la riduzione del rumore, e infine all'estrazione di caratteristiche dell'immagine primitiva quali le discontinuità di intensità. Associeremo alla visione di medio livello quei processi che estraggono, caratterizzano e identificano le componenti di un'immagine risultante dalla visione di basso livello. In termini delle nostre sei suddivisioni, tratteremo la segmentazione, la descrizione e il riconoscimento di singoli oggetti come funzioni della visione di medio livello. La visione ad alto livello si riferisce ai processi che cercano di emulare la percezione. Il Capitolo 7 si occupa della percezione, della preelaborazione e delle tecniche e dei concetti necessari per eseguire le funzioni della visione a basso livello. Gli argomenti riguardanti la visione di livello più alto sono trattati nel Capitolo 8.

1.6 LINGUAGGI DI PROGRAMMAZIONE DEI ROBOT

Uno dei maggiori ostacoli nell'uso dei manipolatori come macchine per impieghi generali è la mancanza di una comunicazione semplice ed efficiente tra l'operatore e il sistema robotico in modo che l'operatore possa guidare il manipolatore nell'esecuzione di un dato compito. Vi sono vari modi per comunicare con un robot, e i tre maggiori approcci per riuscirci sono il riconoscimento di parole distinte, l'insegnamento diretto e i linguaggi di programmazione ad alto livello.

Il riconoscimento della voce attualmente è a uno stadio abbastanza primitivo e generalmente dipendente dalla voce di chi lo ha programmato. Si può riconoscere un insieme di parole distinte appartenenti a un vocabolario limitato e solitamente si richiede all'operatore di fare una pausa tra una parola e l'altra. Sebbene sia ora possibile riconoscere le parole in tempo reale grazie alle maggiori velocità dei calcolatori e ad algoritmi di elaborazione più efficienti, l'utilità del riconoscimento di parole distinte per descrivere un dato compito è limitata. Inoltre, essa richiede un'ampia memoria per immagazzinare i dati relativi al parlato e, solitamente, un periodo di addestramento per costruire parlari calibrati per l'identificazione.

Il metodo di insegnamento diretto consiste nel guidare il robot attraverso i movimenti da effettuare. Questo compito è solitamente svolto nei passi seguenti: (1) guidare il robot muovendolo lentamente sotto controllo manuale per l'intero lavoro di assemblaggio, registrando le posizioni dei giunti

del robot in istanti significativi, per poter poi ripetere il movimento; (2) correzione e riproduzione del movimento che è stato insegnato; e (3) se il movimento insegnato è corretto, allora il robot viene fatto funzionare a velocità appropriata eseguendo ripetitivamente il programma. Questo metodo è anche conosciuto come *guiding* ed è l'approccio più comunemente usato negli attuali robot industriali.

Un approccio più generale per la risoluzione del problema della comunicazione uomo-robot è l'uso della programmazione ad alto livello. I robot sono comunemente utilizzati in aree quali la saldatura ad arco, la saldatura a punti e la verniciatura a spruzzo. Questi lavori non richiedono alcuna interazione tra il robot e l'ambiente e possono essere facilmente programmati con il *guiding*. Invece, l'uso di robot per espletare funzioni di assemblaggio richiede generalmente tecniche di programmazione ad alto livello. Ciò è possibile perché il manipolatore è solitamente controllato da un calcolatore, e il metodo di comunicazione più efficace tra uomini e calcolatori consiste nell'uso di linguaggi di programmazione ad alto livello. Inoltre, l'uso di programmi per rappresentare lavori di assemblaggio permette a un robot di espletare differenti compiti semplicemente eseguendo il programma appropriato. Questo aumenta l'elasticità e la versatilità del robot. Il Capitolo 9 descrive le tecniche di programmazione ad alto livello che consentono di comunicare in modo efficiente con il sistema robotico.

1.7 INTELLIGENZA DEI ROBOT

Un problema fondamentale nella robotica è *pianificare* i movimenti necessari per assolvere alcuni compiti precedentemente specificati e quindi *controllare* che il robot li esegua correttamente. Qui, pianificare significa decidere per una linea d'azione prima dell'azione stessa. Questa parte di sintesi delle azioni del robot può essere risolta da un risolutore di problemi che trovi il modo di raggiungere gli obiettivi stabiliti, data una certa situazione iniziale. Un piano è pertanto la rappresentazione di una linea d'azione atta a raggiungere un fine stabilito.

La ricerca sulla risoluzione dei problemi nei robot ha portato molte idee sui sistemi risolutori di problemi in intelligenza artificiale. In una tipica formulazione di un problema robotico abbiamo un robot dotato di sensori e di un insieme di azioni primitive che esso può effettuare in un mondo facile da comprendere. Le azioni del robot portano da uno stato, o configurazione, del mondo in un altro. Nel "mondo dei blocchi", per esempio, immaginiamo un universo composto da blocchi numerati, appoggiati su un tavolo o l'uno sull'altro, e un robot consistente in una telecamera, in un braccio mobile e in una mano in grado di afferrare e di spostare i blocchi. In alcune situazioni il robot è un veicolo mobile, dotato di una telecamera,

che effettua lavori quali spingere gli oggetti da un posto all'altro in un ambiente contenente altri oggetti.

Nel Capitolo 10 presentiamo diversi metodi fondamentali per la risoluzione dei problemi e delle loro applicazioni per la pianificazione dei robot. La trattazione mette in rilievo la risoluzione dei problemi o pianificazione per i robot. Un pianificatore di robot cerca di trovare un percorso dalla configurazione iniziale del mondo a una configurazione finale. Il percorso consiste in una sequenza di operazioni, che sono considerate primitive del sistema. Una soluzione del problema potrebbe essere la base di una sequenza corrispondente di azioni fisiche nell'universo fisico. La pianificazione dei robot, che fornisce intelligenza e capacità di risolvere problemi ai sistemi robotici, è ancora un'area di ricerca molto attiva. Per le applicazioni dei robot in tempo reale, sono necessari algoritmi di pianificazione potenti ed efficaci che saranno eseguiti da sistemi computerizzati per impieghi speciali ad alta velocità.

BIBLIOGRAFIA

Le fonti generali che citeremo sono rappresentative di pubblicazioni che trattano argomenti che interessano la robotica e i settori vicini. I riferimenti bibliografici forniti al termine di ogni capitolo sono legati ad argomenti specifici trattati nel testo. La bibliografia elencata alla fine del testo è disposta in ordine alfabetico per autore, e contiene tutte le informazioni pertinenti a ogni fonte citata nel testo.

Tra le maggiori riviste e atti di congressi che normalmente contengono articoli riguardanti vari aspetti della robotica citiamo: *IEEE Journal of Robotics and Automation*, *International Journal of Robotics Research*, *Journal of Robotic Systems*, *Robotica*, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, *Artificial Intelligence*, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *Computer Graphics, Vision, and Image Processing*, *Proceedings of the International Symposium on Industrial Robots*, *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, *Mechanism and Machine Theory*, *Proceedings of the Society of Photo-Optical and Instrumentation Engineers*, *ASME Journal of Mechanical Design*, *ASME Journal of Applied Mechanics*, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* e *ASME Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design*.

Letture complementari per il materiale contenuto in questo libro possono reperirsi nei testi di Dodd e Rossol [1979], Engelberger [1980], Paul [1981], Dorf [1983], Snyder [1985], Lee, Gonzalez e Fu [1986], Tou [1985] e Craig [1986].

Cinematica del braccio di un robot

Guarda! Si agita, parte,
si muove, sembra percepire
il fremito della vita!

Henry Wadsworth Longfellow

2.1 INTRODUZIONE

Un manipolatore meccanico può essere descritto come una catena articolata aperta costituita da un determinato numero di corpi rigidi (link) collegati l'uno all'altro tramite giunti rotatori o prismatici, comandati da attuatori. Un'estremità della catena è fissata a una base di supporto mentre l'estremità opposta è libera e dotata di pinza (end-effector) per manipolare oggetti o eseguire lavori di assemblaggio. Il movimento relativo dei giunti ha come risultato lo spostamento dei link e conferisce alla mano l'orientamento desiderato. Nella maggior parte delle applicazioni della robotica interessa la descrizione della posizione dell'estremità dell'effector rispetto a un sistema di coordinate di riferimento fisso.

La cinematica applicata al braccio di un robot si occupa dello studio analitico della geometria del movimento del braccio rispetto a un sistema di coordinate di riferimento in funzione del tempo, prescindendo dalle forze e dai momenti che provocano il moto. Dunque essa si occupa della descrizione analitica dello spostamento del robot nello spazio in funzione del tempo; in particolare si concentra sulle relazioni tra lo spazio dei giunti e la posizione e l'orientamento della pinza. Questo capitolo è fondamentalmente incentrato su due problemi di interesse teorico e pratico della cinematica del braccio:

1. Per un determinato manipolatore, dato il vettore degli angoli dei giunti $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T$ e i parametri geometrici dei link, dove n rappresenta il numero dei gradi di libertà, determinare la posizione e l'ori-

rientamento della pinza rispetto a un sistema di coordinate di riferimento.

2. Dati la posizione e l'orientamento desiderati dell'estremità dell'effector e i parametri geometrici dei link rispetto a un sistema di coordinate di riferimento, il manipolatore può raggiungere la posizione e l'orientamento della mano richiesti? Se sì, quante differenti configurazioni del manipolatore soddisferanno la medesima condizione?

Il primo interrogativo è solitamente indicato quale problema della *trasformazione cinematica diretta*, mentre il secondo è il problema della *trasformazione cinematica inversa* (o *soluzione del braccio*).

Dal momento che le variabili indipendenti del braccio sono quelle dei giunti e che il compito è di solito descritto in termini del sistema di coordinate di riferimento, il problema della cinematica inversa è il più comune. Nella Figura 2.1 è indicato un semplice schema a blocchi che evidenzia la relazione tra questi due problemi.

Dato che i link possono ruotare e/o traslare rispetto a un sistema di coordinate di riferimento, lo spostamento globale della pinza è dovuto alle rotazioni angolari e alle traslazioni lineari degli stessi link. Denavit e Hartenberg [1955] hanno proposto un approccio sistematico e generalizzato per l'utilizzo di matrici algebriche al fine di rappresentare la geometria spaziale del braccio. Questo metodo utilizza una matrice di trasformazioni omogenea 4×4 per descrivere la relazione spaziale fra due segmenti meccanici rigidi adiacenti e riduce il problema della cinematica diretta alla ricerca di una equivalente matrice di trasformazione omogenea 4×4 . Quest'ultima mette in relazione lo spostamento nello spazio del sistema di coordinate della mano rispetto al sistema di coordinate di riferimento. Tali matrici tro-

vano impiego anche nella ricerca delle equazioni dinamiche del movimento del braccio.

Generalmente il problema della cinematica inversa può essere risolto avvalendosi di diverse tecniche. I metodi più comunemente usati sono gli approcci algebrici matriciali, iterativi, o geometrici. Per prima cosa verrà presentato un approccio geometrico basato sui sistemi di coordinate dei link e sulla configurazione del manipolatore per ottenere una soluzione in forma chiusa di semplici manipolatori con giunti di rotazione. In seguito cercheremo un approccio di carattere più generale con matrici 4×4 per raggiungere lo stesso scopo.

2.2 IL PROBLEMA DELLA TRASFORMAZIONE CINEMATICA DIRETTA

Per sviluppare un approccio sistematico e generalizzato alla descrizione e rappresentazione della posizione dei link rispetto a un determinato sistema di riferimento ci avvarremo dell'algebra vettoriale e matriciale*. Dato che gli elementi del braccio possono ruotare e/o traslare rispetto a un sistema di coordinate di riferimento, si definirà per ogni link un sistema di coordinate solidale col link stesso. Il problema della trasformazione cinematica diretta riguarda la ricerca di matrici di trasformazione che mettano in relazione i sistemi precedentemente descritti. Per descrivere le operazioni di rotazione del sistema di coordinate del bersaglio si utilizza una matrice di rotazione 3×3 . Si usano poi coordinate omogenee per rappresentare i vettori posizione in uno spazio tridimensionale, e le matrici di rotazione saranno ampliate in una matrice di trasformazione omogenea 4×4 perché siano comprese le operazioni di traslazione dei sistemi di coordinate mobili. Questa rappresentazione matriciale di un segmento meccanico rigido per descrivere la geometria spaziale del braccio è stata usata per la prima volta da Denavit e Hartenberg [1955]. Il suo vantaggio sta nella universalità dell'algoritmo per il calcolo dell'equazione cinematica del braccio.

2.2.1 MATRICI DI ROTAZIONE

Una matrice di rotazione 3×3 può essere definita come una matrice di trasformazione operante su un vettore posizione in uno spazio tridimensionale euclideo. Essa trasforma le sue coordinate espresse in un sistema di coordi-

*I vettori sono rappresentati da lettere minuscole e le matrici da maiuscole, entrambe in neretto.

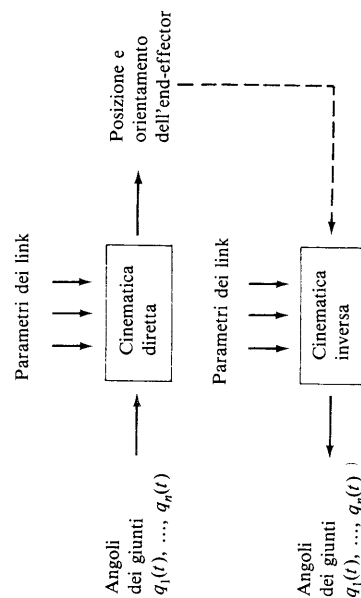


Fig. 2.1 - I problemi della trasformazione cinematica diretta e inversa.

dinate rotazionale OUVW (sistema solidale col link) nelle coordinate espresse in un sistema di riferimento OXYZ. Nella Figura 2.2 abbiamo due sistemi di coordinate ortogonali destrorsi. Più esattamente, il sistema di coordinate OXYZ con x , y e z come assi, e il sistema di coordinate OUVW con assi u , v e w . Entrambi i sistemi hanno le loro origini coincidenti nel punto O. Il sistema di coordinate OXYZ è fisso nello spazio tridimensionale ed è considerato il sistema di riferimento. Il sistema OUVW può ruotare rispetto a OXYZ. Dal punto di vista fisico, si può considerare OUVW solidale con il corpo, perché è ancorato permanentemente e in modo opportuno al corpo rigido (per esempio a un aereo o a un link del braccio di un robot), e si muove con questo.

Chiamiamo (i_x, j_x, k_x) e (i_u, j_u, k_u) i versori rispettivamente lungo gli assi dei sistemi OXYZ e OUVW. Un punto \mathbf{p} nello spazio può essere rappresentato per mezzo delle sue coordinate rispetto a entrambi i sistemi. Per semplificare la trattazione, consideriamo \mathbf{p} in quiete e fisso rispetto a OUVW. In questo modo \mathbf{p} si può descrivere per mezzo delle sue coordinate nei sistemi OUVW e OXYZ:

$$\mathbf{p}_{OUVW} = (p_u, p_v, p_w)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_{OXYZ} = (p_x, p_y, p_z)^T \quad (2.2.1)$$

dove \mathbf{p}_{OXYZ} e \mathbf{p}_{OUVW} rappresentano lo stesso punto \mathbf{p} nello spazio rispetto ai due sistemi. L'esponente T su vettori e matrici indica l'operazione di trasposizione.

Ora vorremmo trovare una matrice di trasformazione \mathbf{R} 3×3 che converta

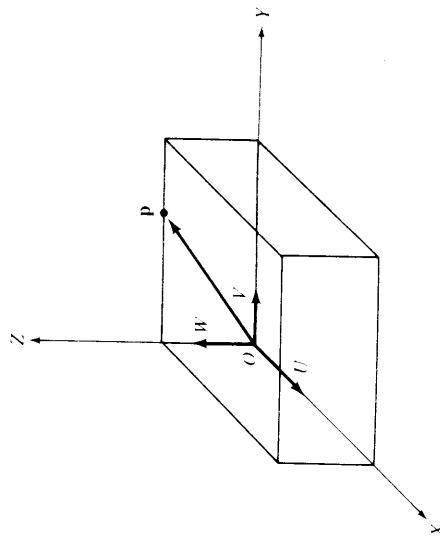


Figura 2.2 Sistemi di coordinate di riferimento e solidali al corpo.

le coordinate di \mathbf{p}_{OUVW} nelle coordinate espresse rispetto a OXYZ, dopo aver effettuato una rotazione del sistema OUVW. Cioè:

$$\mathbf{p}_{OXYZ} = \mathbf{R} \mathbf{p}_{OUVW} \quad (2.2.2)$$

Si noti che fisicamente il punto \mathbf{p}_{OUVW} è stato ruotato insieme al sistema OUVW.

Richiamando la definizione delle componenti di un vettore, abbiamo:

$$\mathbf{p}_{OUVW} = p_u \mathbf{i}_u + p_v \mathbf{j}_v + p_w \mathbf{k}_w \quad (2.2.3)$$

dove p_x , p_y e p_z rappresentano le componenti di \mathbf{p} rispettivamente lungo gli assi x , y e z o le proiezioni di \mathbf{p} sui rispettivi assi. Così, facendo uso della definizione di prodotto scalare e dell'equazione (2.2.3):

$$\begin{aligned} p_x &= \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{p} = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w p_w \\ p_y &= \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{p} = \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w p_w \\ p_z &= \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u p_u + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v p_v + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w p_w \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

o in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

Adottando questa notazione, la matrice \mathbf{R} dell'equazione (2.2.2.) è data da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

Allo stesso modo possiamo ottenere le coordinate di \mathbf{p}_{OUVW} da quelle di \mathbf{p}_{OXYZ} :

$$\mathbf{p}_{OUVW} = \mathbf{Q} \mathbf{p}_{OXYZ} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{matrix} \text{o} \\ \left[\begin{matrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{matrix} \right] \end{matrix} = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Dal momento che i prodotti scalari sono commutativi, dalle equazioni (2.2.6), (2.2.7) e (2.2.8) si può osservare che:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (2.2.9)$$

$$\text{e che:} \quad \mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 \quad (2.2.10)$$

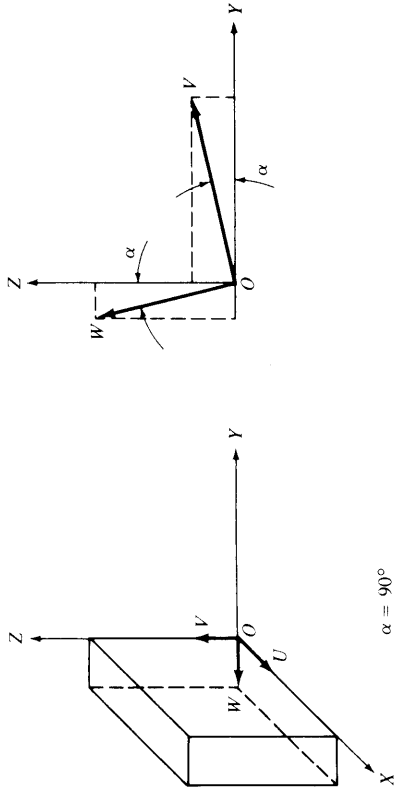
dove \mathbf{I}_3 è una matrice identità 3×3 . La trasformazione attuata nell'equazione (2.2.2) o nella (2.2.7) viene detta *ortogonale* e, dato che i vettori dei prodotti scalari sono tutti unitari, viene anche detta *ortonormale*. L'interesse primario nello sviluppo della matrice di trasformazione precedente è rivolto a trovare le matrici di rotazione che rappresentano le rotazioni del sistema OUVW intorno a ciascuno dei tre assi principali del sistema di coordinate di riferimento OXYZ. Se il sistema OUVW è ruotato di un angolo α intorno all'asse x per giungere a un nuovo posizionamento nello spazio, allora il punto p_{uvw} , avente coordinate $(p_u, p_v, p_w)^T$ rispetto a OUVW avrà coordinate differenti $(p_x, p_y, p_z)^T$ rispetto a OXYZ. La matrice di trasformazione necessaria $\mathbf{R}_{x,\alpha}$ è chiamata matrice di rotazione di un angolo α intorno all'asse x . $\mathbf{R}_{x,\alpha}$ può essere ricavata dal concetto di matrice di trasformazione precedentemente esposto:

$$\mathbf{p}_{xyz} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \mathbf{p}_{uvw} \quad (2.2.11)$$

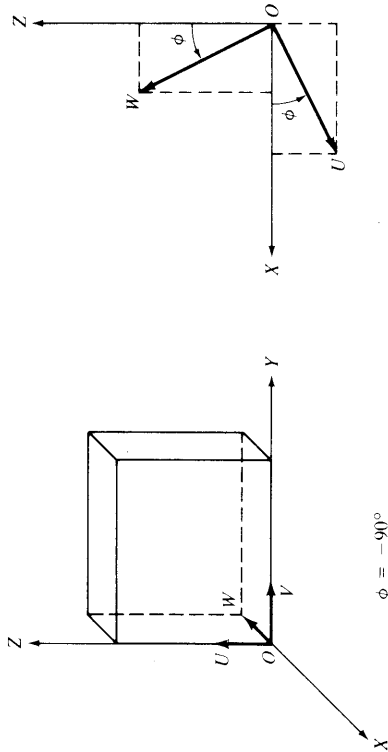
con $i_x \equiv i_u$, e

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

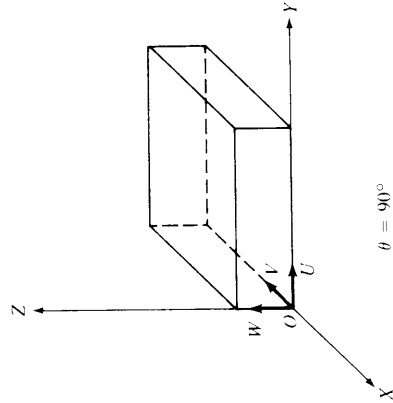
Allo stesso modo le matrici 3×3 per la rotazione intorno all'asse y di un angolo ϕ e intorno a z di un angolo θ sono rispettivamente (vedi Figura 2.3):



$\alpha = 90^\circ$



$\phi = -90^\circ$



$\theta = 90^\circ$

Figura 2.3 Sistemi di coordinate rotanti.

$$\mathbf{R}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Le matrici $\mathbf{R}_{x,\alpha}$, $\mathbf{R}_{y,\phi}$, e $\mathbf{R}_{z,\theta}$ sono chiamate *matrici di rotazione fondamentali*. Da queste possono essere ottenute altre matrici di rotazione finite.

ESEMPIO 2.1 Dati due punti $\mathbf{a}_{uvw} = (4, 3, 2)^T$ e $\mathbf{b}_{uvw} = (6, 2, 4)^T$ rispetto al sistema di coordinate di rotazione OUVW, determinare i punti corrispondenti \mathbf{a}_{xyz} , \mathbf{b}_{xyz} rispetto al sistema di riferimento se questo è stato ruotato di 60° intorno all'asse z .

SOLUZIONE

$$\mathbf{a}_{xyz} = \mathbf{R}_{z,60}^T \mathbf{a}_{uvw} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_{xyz} = \mathbf{R}_{z,60}^T \mathbf{b}_{uvw}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{xyz} &= \begin{bmatrix} 0.500 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4(0.5) + 3(-0.866) + 2(0) \\ 4(0.866) + 3(0.5) + 2(0) \\ 4(0) + 3(0) + 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.598 \\ 4.964 \\ 2.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_{xyz} &= \begin{bmatrix} 0.500 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.268 \\ 6.196 \\ 4.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Così, \mathbf{a}_{xyz} e \mathbf{b}_{xyz} sono uguali rispettivamente a $(-0.598, 4.964, 2.0)^T$ e $(1.268, 6.196, 4.0)^T$, quando sono espressi in relazione al sistema di coordinate di riferimento.

ESEMPIO 2.2 Se $\mathbf{a}_{xyz} = (4, 3, 2)^T$ e $\mathbf{b}_{xyz} = (6, 2, 4)^T$ sono le coordinate rispetto al sistema di coordinate di riferimento, determinare i punti corrispondenti \mathbf{a}_{uvw} , \mathbf{b}_{uvw} rispetto al sistema di rotazione OUVW se questo è stato ruotato di 60° intorno all'asse z .

SOLUZIONE

$$\mathbf{a}_{uvw} = (\mathbf{R}_{z,60})^T \mathbf{a}_{xyz} \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_{uvw} = (\mathbf{R}_{z,60})^T \mathbf{b}_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.866 & 0 \\ -0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0.5) + 3(0.866) + 2(0) \\ 4(-0.866) + 3(0.5) + 2(0) \\ 4(0) + 3(0) + 2(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.598 \\ -1.964 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.866 & 0 \\ -0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.732 \\ -4.196 \\ 4.0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 MATRICI DI ROTAZIONE COMPOSITE

Le matrici di rotazione fondamentali possono essere moltiplicate fra loro per rappresentare una sequenza di rotazioni finite intorno agli assi principali del sistema OXYZ. Dal momento che le moltiplicazioni delle matrici non sono commutative, è importante osservare l'ordine o la sequenza nell'effettuare le rotazioni. Per esempio, lo sviluppo di una matrice che rappresenti una rotazione di angolo α intorno all'asse x seguita da una rotazione di angolo θ intorno all'asse z , seguita da un'ulteriore rotazione ϕ intorno a y , dà come risultato:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & S\phi S\alpha - C\phi S\theta C\alpha & C\phi S\theta S\alpha + S\phi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\phi C\theta & S\phi S\theta C\alpha + C\phi S\alpha & C\phi C\alpha - S\phi S\theta S\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

dove $C\phi \equiv \cos \phi$, $S\phi \equiv \sin \phi$, $C\theta \equiv \cos \theta$, $S\theta \equiv \sin \theta$, $C\alpha \equiv \cos \alpha$, $S\alpha \equiv \sin \alpha$. Ciò è differente dalla matrice che rappresenta una rotazione di

angolo ϕ intorno a y seguita da una rotazione di angolo θ intorno a z e ancora da una rotazione di angolo α intorno a x . La matrice di rotazione in questo caso è:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta & C\theta S\phi \\ C\alpha S\theta C\phi + S\alpha S\phi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta S\phi - S\alpha C\phi \\ S\alpha S\theta C\phi - C\alpha S\phi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta S\phi + C\alpha C\phi \end{bmatrix}$$

Oltre a ruotare intorno agli assi principali del sistema di riferimento, il sistema di coordinate di rotazione può ruotare anche intorno ai suoi stessi assi principali. In questo caso, la matrice rotazionale risultante o composta può essere ottenuta dalle semplici regole che seguono:

1. Inizialmente, entrambi i sistemi sono coincidenti, e la matrice rotazionale è una matrice identità 3×3 , \mathbf{I}_3 .
2. Se il sistema OUVW ruota intorno a uno degli assi principali di OXYZ, allora occorre premoltiplicare la precedente matrice con una opportuna matrice di rotazione fondamentale.*
3. Se il sistema di rotazione OUVW ruota intorno ai suoi stessi assi principali, allora occorre postmultiplicare la matrice precedente per una adeguata matrice di rotazione fondamentale.

ESEMPIO 2.3 Trovare la matrice che rappresenta una rotazione di angolo ϕ intorno all'asse y , seguita da una rotazione di angolo θ intorno a w , cui segue una rotazione di angolo α intorno all'asse u .

SOLUZIONE

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{I}_3 \mathbf{R}_{w,\theta} \mathbf{R}_{u,\alpha} = \mathbf{R}_{y,\phi} \mathbf{R}_{w,\theta} \mathbf{R}_{u,\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Con "premultiplicare una matrice" intendiamo il prodotto ottenuto ponendo a sinistra della stessa la matrice nominata per ultima. "Postmultiplicare" implica il processo inverso.

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & S\phi S\alpha - C\phi S\theta C\alpha & C\phi S\theta S\alpha + S\phi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\phi C\theta & S\phi S\theta C\alpha + C\phi S\alpha & C\phi C\alpha - S\phi S\theta S\alpha \end{bmatrix}$$

È da notare che questo esempio è stato scelto in modo che la matrice risultante sia la stessa della (2.2.14), ma la sequenza delle rotazioni è differente.

2.2.3 MATRICI DI ROTAZIONE INTORNO A UN ASSE ARBITRARIO

Talvolta il sistema OUVW può ruotare di un angolo ϕ intorno a un asse arbitrario \mathbf{r} che è un vettore di componenti r_x , r_y e r_z , passante per l'origine O.

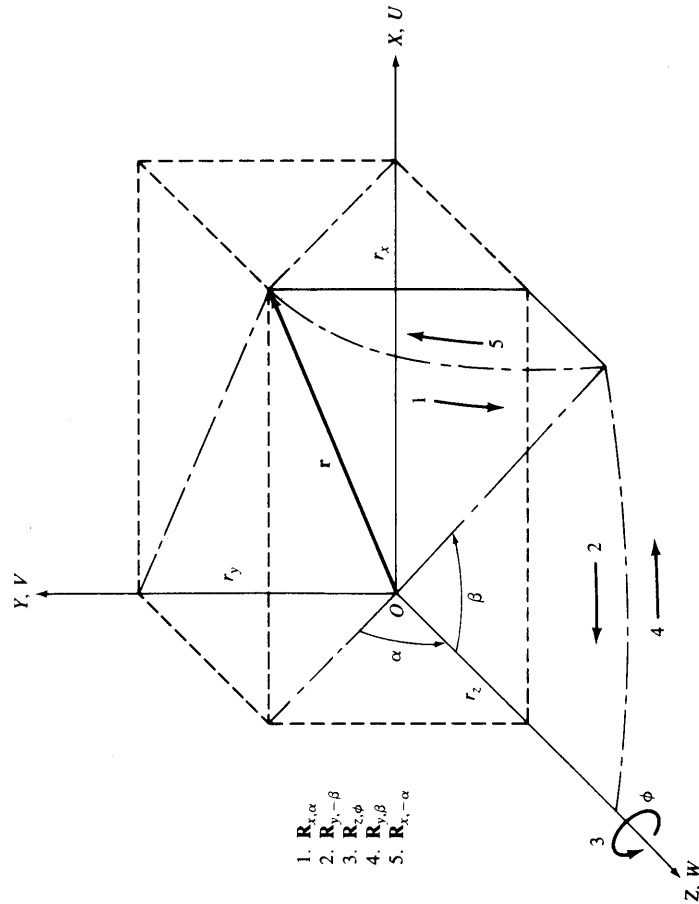


Figura 2.4 Rotazione intorno a un asse arbitrario.

Il vantaggio è che per alcuni movimenti angolari il sistema OUVW può effettuare una rotazione intorno all'asse \mathbf{r} invece che una serie di rotazioni intorno agli assi principali dei sistemi OUVW e/o OXYZ. Per ricavare questa matrice $\mathbf{R}_{r,\phi}$, possiamo per prima cosa effettuare alcune rotazioni intorno agli assi principali del sistema OXYZ per allineare l'asse \mathbf{r} all'asse z . Poi possiamo effettuare la rotazione di angolo ϕ intorno all'asse \mathbf{r} e ruotare ancora intorno agli assi principali del sistema OXYZ per riportare l'asse \mathbf{r} nella posizione originaria.

Riferendoci alla Figura 2.4, l'allineamento dell'asse z con l'asse \mathbf{r} può essere ottenuto con una rotazione intorno all'asse x di un angolo α (l'asse \mathbf{r} giace sul piano XZ), seguita da una rotazione di angolo $-\beta$ intorno a y (l'asse \mathbf{r} ora si allinea all'asse z). Dopo la rotazione di angolo ϕ intorno all'asse z o \mathbf{r} , occorre invertire la sequenza di rotazione suddetta utilizzando i rispettivi angoli opposti. La matrice di rotazione che ne risulta è:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{r,\phi} &= \mathbf{R}_{x,-\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,-\beta} \mathbf{R}_{x,\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & S\alpha \\ 0 & -S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dalla Figura 2.4 si ricava facilmente che:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & \cos \alpha &= \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} \\ \sin \beta &= r_x & \cos \beta &= \sqrt{r_y^2 + r_z^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione precedente:

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + C\phi & r_x r_y V\phi - r_z S\phi & r_x r_z V\phi + r_y S\phi \\ r_x r_y V\phi + r_z S\phi & r_y^2 V\phi + C\phi & r_y r_z V\phi - r_x S\phi \\ r_x r_z V\phi - r_y S\phi & r_y r_z V\phi + r_x S\phi & r_z^2 V\phi + C\phi \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

dove $V\phi = \text{vers } \phi = 1 - \cos \phi$. Questa è una matrice di rotazione molto utile.

ESEMPIO 2.4 Trovare la matrice $\mathbf{R}_{r,\phi}$ che rappresenta la rotazione di angolo ϕ intorno al vettore $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$.

SOLUZIONE Dato che il vettore \mathbf{r} non è unitario, dobbiamo normalizzarlo e trovare le sue componenti lungo gli assi principali del sistema OXYZ. Quindi:

$$r_x = \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad r_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad r_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sostituendo nell'equazione (2.2.16) otteniamo la matrice:

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}V\phi + C\phi & \frac{1}{3}V\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}S\phi & \frac{1}{3}V\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}S\phi \\ \frac{1}{3}V\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}S\phi & \frac{1}{3}V\phi + C\phi & \frac{1}{3}V\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}S\phi \\ \frac{1}{3}V\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}S\phi & \frac{1}{3}V\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}S\phi & \frac{1}{3}V\phi + C\phi \end{bmatrix}$$

2.2.4 MATRICI DI ROTAZIONE RAPPRESENTATE SECONDO GLI ANGOLI DI EULERO

La rappresentazione matriciale per la rotazione di un corpo rigido semplifica molte operazioni ma necessita di nove elementi per descrivere completamente l'orientamento di un corpo rigido rotante. Questo non porta direttamente a un insieme completo di coordinate generalizzate che descrive l'orientamento di un corpo rigido rotante rispetto a un sistema di riferimento. Tali coordinate generalizzate possono essere ricavate da tre angoli detti di Eulero: ϕ , θ e ψ . Sebbene questi angoli rappresentino l'orientazione rispetto a un sistema di coordinate di riferimento fisso, vi sono diversi modi per rappresentare gli angoli euleriani. I tre più largamente usati sono illustrati nella Tabella 2.1.

La prima rappresentazione è di norma associata ai movimenti giroscopici. Questa, solitamente chiamata rappresentazione degli angoli euleriani, corrisponde alle seguenti sequenze di rotazione (vedi Figura 2.5).

Tabella 2.1 Tre tipi di rappresentazione degli angoli di Eulero.

Sequenza delle rotazioni	Angoli di Eulero I sistema	Angoli di Eulero II sistema	Angoli di Eulero III sistema
ϕ intorno all'asse z	ϕ intorno all'asse z	ψ intorno all'asse z	ψ intorno all'asse x
θ intorno all'asse u	θ intorno all'asse u	θ intorno all'asse v	θ intorno all'asse y
ψ intorno all'asse w	ψ intorno all'asse w	ϕ intorno all'asse w	ϕ intorno all'asse z

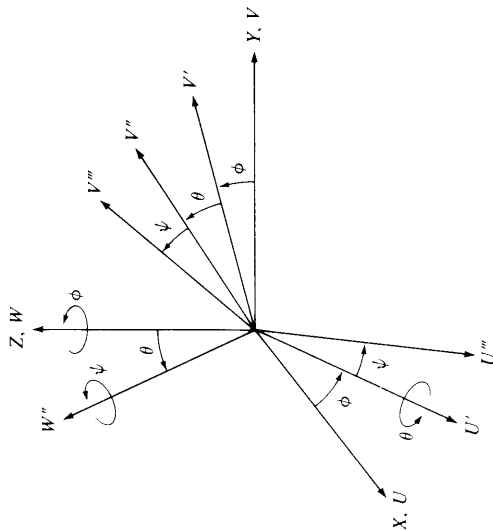


Figura 2.5 1° sistema degli angoli di Eulero.

1. Rotazione di angolo ϕ intorno all'asse z ($\mathbf{R}_{z,\phi}$).
2. Rotazione di angolo θ intorno all'asse u ruotato ($\mathbf{R}_{u,\theta}$).
3. Infine, una rotazione di angolo ψ intorno all'asse w ruotato ($\mathbf{R}_{w,\psi}$).

La matrice di rotazione euleriana risultante è:

$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{u,\theta} \mathbf{R}_{w,\psi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

La matrice di cui sopra può essere espressa anche in termini di rotazioni intorno agli assi principali del sistema di coordinate di riferimento: una rotazione di angolo ψ intorno all'asse z seguita da una di angolo θ intorno a x e infine da una rotazione ϕ intorno a z .

Con riferimento alla Figura 2.6, un altro tipo di rappresentazione degli angoli di Eulero corrisponde alla seguente sequenza:

1. Rotazione di angolo ϕ intorno all'asse z ($\mathbf{R}_{z,\phi}$).
2. Rotazione di angolo θ intorno all'asse v ruotato ($\mathbf{R}_{v,\theta}$).
3. Infine, una rotazione di angolo ψ intorno all'asse w ruotato ($\mathbf{R}_{w,\psi}$).

La matrice di rotazione risultante è:

$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{v,\theta} \mathbf{R}_{w,\psi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\psi - S\phi S\psi & -C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta \\ S\phi C\theta C\psi + C\phi S\psi & -S\phi C\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

La suddetta matrice $\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi}$ di angoli euleriani può essere espressa anche in termini di rotazioni intorno agli assi principali del sistema di coordinate di riferimento: rotazione ψ intorno a z , poi di angolo θ intorno a y , infine ϕ intorno a z .

Un'altra rappresentazione basata sugli angoli euleriani per la rotazione è detta rollio, beccheggio e imbardata. Questo sistema è adottato principalmente in ingegneria aeronautica per l'analisi del moto dei veicoli spaziali. Si ha corrispondenza con la seguente sequenza di rotazioni:

1. ψ intorno a x ($\mathbf{R}_{x,\psi}$), imbardata
2. θ intorno a y ($\mathbf{R}_{y,\theta}$), beccheggio
3. ϕ intorno a z ($\mathbf{R}_{z,\phi}$), rollio

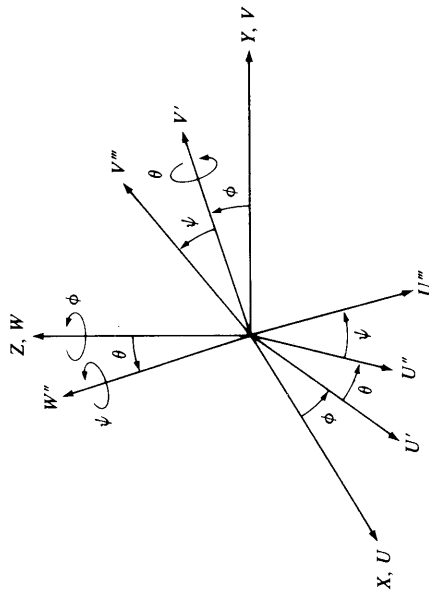


Figura 2.6 2° sistema degli angoli di Eulero.

La matrice di rotazione risultante è:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\phi, \psi, \theta} &= \mathbf{R}_{z, \phi} \mathbf{R}_{y, \psi} \mathbf{R}_{x, \theta} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\phi & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix} \quad (2.2.19)
 \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{R}_{\phi, \psi, \theta}$ può essere anche espressa in termini delle rotazioni intorno agli assi principali del sistema di coordinate di riferimento e del sistema di coordinate di rotazione. Rotazioni in sequenza: ϕ per z , θ per v ruotato, infine ψ per u ruotato (vedi Figura 2.7).

2.2.5 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLE MATRICI DI ROTAZIONE

È opportuno interpretare geometricamente le matrici di rotazione fondamentali. Scegliamo un punto \mathbf{p} fissato nel sistema di coordinate OUVW che

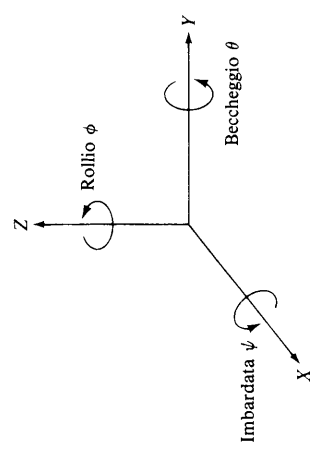


Figura 2.7 Roll, pitch e yaw (rollio, beccheggio e imbardata).

sia $(1, 0, 0)^T$, cioè $\mathbf{p}_{uvw} \equiv \mathbf{i}_u$. La prima colonna della matrice rappresenterà le coordinate del punto rispetto al sistema OXYZ. In modo analogo, con \mathbf{p} scelto come $(0, 1, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$, si può riconoscere che gli elementi della seconda e della terza colonna di una matrice rappresentano rispettivamente gli assi v e w di OUVW rispetto a OXYZ. Così, dato un sistema OXYZ e una matrice di rotazione, i vettori colonna della matrice rappresentano gli assi principali di OUVW rispetto al sistema di riferimento. In tal modo si può evidenziare la posizione di tutti gli assi principali di OUVW rispetto al sistema di coordinate di riferimento. In altri termini, una matrice di rotazione rappresenta geometricamente gli assi principali del sistema di coordinate di rotazione rispetto al sistema di coordinate di riferimento. Dato che l'inverso di una matrice rotazionale equivale alla sua trasposizione, i vettori riga della matrice rappresentano gli assi principali di OXYZ rispetto a OUVW. Questa interpretazione geometrica delle matrici di rotazione è un concetto importante che permette la comprensione di molti problemi cinematici del braccio di un robot. Descriviamo qui alcune interessanti proprietà delle matrici:

1. Ogni vettore colonna della matrice di rotazione è una rappresentazione del vettore unitario dell'asse di rotazione espressa in termini dell'asse dei vettori unitari del sistema di riferimento, e ogni vettore riga è una rappresentazione del vettore unitario dell'asse del sistema di coordinate di riferimento espresso in relazione ai vettori unitari dell'asse di rotazione del sistema OUVW.
2. Dato che ogni riga e colonna costituiscono una rappresentazione del vettore unitario, il valore di ciascuna di esse dovrebbe essere uguale a 1. Questa è una proprietà diretta del sistema di coordinate ortonormali. Inoltre, il determinante di una matrice di rotazione è +1 per i sistemi di coordinate destrorsi e -1 per quelli sinistrorsi.

3. Considerato che ogni riga è una rappresentazione vettoriale di vettori ortonormali, il suo prodotto scalare con ogni altra riga è 0. Allo stesso modo, il prodotto scalare di una colonna con un'altra colonna è sempre uguale a zero.
4. L'inverso di una matrice di rotazione è la trasposta della matrice stessa.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$$

dove \mathbf{I}_3 è la matrice identità 3×3 .

Le proprietà 3 e 4 sono specialmente utili per verificare i risultati delle moltiplicazioni delle matrici di rotazione e per trovare vettori riga o colonna errati.

ESEMPIO 2.5 Se gli assi coordinati u , v e w fossero ruotati di un angolo α intorno a x , quale sarebbe la rappresentazione degli assi del sistema di coordinate di riferimento espressi nel sistema di coordinate OUVW?

SOLUZIONE I nuovi versori degli assi coordinati diventano $\mathbf{i}_u = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{j}_v = (0, 1, 0)^T$ e $\mathbf{k}_w = (0, 0, 1)^T$ dato che sono espressi in relazione a se stessi. I versori originari sono allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x &= 1\mathbf{i}_u + 0\mathbf{j}_v + 0\mathbf{k}_w = (1, 0, 0)^T \\ \mathbf{j}_y &= 0\mathbf{i}_u + \cos\alpha\mathbf{j}_v - \sin\alpha\mathbf{k}_w = (0, \cos\alpha, -\sin\alpha)^T \\ \mathbf{k}_z &= 0\mathbf{i}_u + \sin\alpha\mathbf{j}_v + \cos\alpha\mathbf{k}_w = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)^T \end{aligned}$$

Applicando la proprietà 1 e considerando queste equazioni come righe della matrice di rotazione, si può ricostruire la matrice $\mathbf{R}_{x,\alpha}$ come:

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

che equivale alla trasposizione dell'equazione (2.2.12).

2.2.6 COORDINATE OMOGENEE E MATRICI DI TRASFORMAZIONE

Dato che una matrice di rotazione 3×3 non ci fornisce alcuna indicazione per la traslazione e la trasformazione di scala, viene introdotta una quarta coordinata o componente nel vettore posizione $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ in uno spazio tridimensionale che lo rende $\hat{\mathbf{p}} = (wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$. Possiamo dire che il vettore posizione $\hat{\mathbf{p}}$ è espresso in *coordinate omogenee*. In questo paragrafo useremo un accento circonflesso ($\hat{}$) per indicare la rappresentazione di un vettore cartesiano in coordinate omogenee. In seguito, se non vi sarà possibilità di equivocare, questi accenti potranno essere omissi. Il concetto di rappresentazione in coordinate omogenee di punti in uno spazio tridimensionale euclideo è utile per sviluppare trasformazioni matriciali che comprendano rotazione, traslazione, trasformazioni di scala e trasformazioni prospettiche. In generale, la rappresentazione di un vettore posizione di N componenti con un vettore di $(N+1)$ componenti è chiamata *rappresentazione in coordinate omogenee*. In tale rappresentazione, la trasformazione di un vettore N dimensionale è effettuata nello spazio $(N+1)$ dimensionale, e il vettore fisico N dimensionale si ottiene dividendo le coordinate omogenee per la coordinata $(N+1)$ -esima, w . In questo modo, in uno spazio tridimensionale, un vettore posizione $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ è rappresentato da un vettore completo $(wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$ in coordinate omogenee. Le coordinate fisiche sono in relazione alle coordinate omogenee come segue:

$$p_x = \frac{wp_x}{w} \quad p_y = \frac{wp_y}{w} \quad p_z = \frac{wp_z}{w}$$

Non esiste un'unica rappresentazione in coordinate omogenee per un vettore posizione in uno spazio tridimensionale. Per esempio, $\hat{\mathbf{p}}_1 = (w_1 p_x, w_1 p_y, w_1 p_z, w_1)^T$ e $\hat{\mathbf{p}}_2 = (w_2 p_x, w_2 p_y, w_2 p_z, w_2)^T$ sono tutte coordinate omogenee che rappresentano lo stesso vettore posizione $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$. Così, si può considerare la quarta componente delle coordinate omogenee w , come un fattore di scala. Se questa coordinata è unitaria ($w = 1$), allora le coordinate omogenee di un vettore posizione saranno uguali alle coordinate fisiche del vettore stesso. Nelle applicazioni della robotica, questo fattore sarà sempre uguale a 1, sebbene sia comunemente usato nella computer graphic come fattore di scala universale che può assumere qualunque valore positivo.

La matrice di trasformazione omogenea è una matrice 4×4 che trasforma un vettore posizione espresso in coordinate omogenee da un sistema di coordinate a un altro. Tale matrice può considerarsi costituita da quattro sottomatrici:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{P}_{3 \times 1} & \text{vettore} \\ \hline - & - & \text{posizione} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & \mathbf{1} \times \mathbf{1} & \text{fattore} \\ & & \text{di scala} \end{array} \right] = \quad (2.2.20)$$

La sottomatrice 3×3 in alto a sinistra rappresenta la matrice di rotazione; quella 3×1 in alto a destra rappresenta il vettore posizione dell'origine del sistema ruotato rispetto al sistema di riferimento; la sottomatrice 1×3 in basso a sinistra rappresenta la trasformazione prospettica; e il quarto elemento diagonale è il fattore di scala globale. Si può usare la matrice di trasformazione omogenea per spiegare le relazioni geometriche tra il sistema di riferimento OUVW solidale al corpo e il sistema di riferimento OXYZ. Se un vettore posizione \mathbf{p} in uno spazio tridimensionale è espresso in coordinate omogenee [cioè $\hat{\mathbf{p}} = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$], utilizzando il concetto di matrice di trasformazione, una matrice di rotazione 3×3 può essere espansa a una matrice di trasformazione omogenea 4×4 \mathbf{T}_{rot} per le operazioni di sola rotazione. Pertanto le equazioni (2.2.12) e (2.2.13) espresse come matrici di rotazione omogenee, diventano:

$$\mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{T}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Queste matrici 4×4 sono dette *matrici di rotazione omogenee fondamentali*. La sottomatrice 3×1 in alto a destra ha l'effetto di traslare il sistema OUVW che ha gli assi paralleli al sistema OXYZ, ma la cui origine è nel punto (dx, dy, dz) rispetto al sistema di riferimento:

$$\mathbf{T}_{\text{tran}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.22)$$

Questa matrice 4×4 è chiamata *matrice di traslazione omogenea fondamentale*.

La sottomatrice 1×3 in basso a sinistra nella matrice di trasformazione omogenea rappresenta la trasformazione prospettica, che è utile per la visione automatica e per la calibrazione dei modelli fotografici di cui si tratterà nel Capitolo 7. Nella presente trattazione gli elementi di questa sottomatrice sono posti a zero per indicare trasformazione prospettica nulla.

I principali elementi diagonali di una matrice di trasformazione omogenea producono trasformazioni di scala locali e globali. I primi tre elementi diagonali producono estensioni locali o trasformazioni di scala, come in

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.23)$$

In questo modo i valori delle coordinate sono derivati rispettivamente da quelli scalari a, b, c . È da notare che le matrici di rotazione fondamentali \mathbf{T}_{rot} non producono alcun effetto locale di trasformazione di scala.

Il quarto elemento diagonale produce una trasformazione globale di scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

dove $s > 0$. Le coordinate fisiche cartesiane del vettore sono:

$$p_x = \frac{x}{s} \quad p_y = \frac{y}{s} \quad p_z = \frac{z}{s} \quad w = \frac{s}{s} = 1 \quad (2.2.25)$$

Dunque, il quarto elemento diagonale della matrice di trasformazione omogenea produce l'effetto di ridurre globalmente le coordinate se $s > 1$ e di aumentarle se $0 < s < 1$.

In conclusione, una matrice di trasformazione omogenea 4×4 rappresenta

un vettore espresso in coordinate omogenee nel sistema OUVW rispetto a OXYZ. Cioè, con $w = 1$,

$$\hat{\mathbf{p}}_{xyz} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{p}}_{uvw} \quad (2.2.26a)$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.26b)$$

2.2.7 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLE MATRICI DI TRASFORMAZIONE OMOGENEE

In generale, una matrice di trasformazione omogenea in uno spazio tridimensionale può essere rappresentata come nell'equazione (2.2.26b). Scegliamo un punto \mathbf{p} fissato nel sistema OUVW ed espresso in coordinate omogenee come $(0, 0, 0, 1)^T$; in altre parole, \mathbf{p}_{uvw} è l'origine del sistema OUVW. Allora la sottomatrice 3×1 in alto a destra indicherà la posizione dell'origine del sistema OUVW rispetto a OXYZ. Poi, scegliamo il punto \mathbf{p} come $(1, 0, 0, 1)^T$; cioè $\mathbf{p}_{uvw} \equiv \mathbf{i}_u$. Inoltre assumiamo che le origini di entrambi i sistemi coincidano nel punto O. Ciò produce l'effetto di rendere gli elementi posti nella sottomatrice 3×1 in alto a destra un vettore nullo. Allora la prima colonna della matrice (o vettore \mathbf{n}) rappresenterà le coordinate dell'asse u di OUVW rispetto al sistema OXYZ. Analogamente, scegliendo \mathbf{p} come $(0, 1, 0, 1)^T$ e $(0, 0, 1, 1)^T$ si può capire come gli elementi della seconda colonna (o vettore \mathbf{s}) e terza colonna della matrice (vettore \mathbf{a}) rappresentino rispettivamente gli assi v e w di OUVW rispetto al sistema di riferimento. Quindi, dato un sistema di riferimento OXYZ e una matrice di trasformazione omogenea \mathbf{T} , i vettori colonna della sottomatrice di rotazione rappresentano gli assi principali del sistema OUVW rispetto al sistema di riferimento. Il quarto vettore colonna rappresenta la posizione dell'origine del sistema OUVW rispetto al sistema di riferimento. In altri termini, una matrice di trasformazione omogenea rappresenta geometricamente la *collocazione* di un sistema ruotato (posizione e orientamento) rispetto a un sistema di riferimento. Considerando che l'inverso di una sottomatrice di rotazione equivale alla sua trasposta, i vettori riga rappresentano gli assi principali del sistema di riferimento rispetto al sistema OUVW. Comunque, l'inverso di una matrice

di trasformazione omogenea non è equivalente alla sua trasposta. La posizione dell'origine del sistema di coordinate di riferimento rispetto a OUVW può essere trovata soltanto dopo che sia stato determinato l'inverso della matrice di trasformazione. In generale, l'inverso di una matrice di trasformazione omogenea è dato da:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ s_x & s_y & s_z & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3}^T & \\ & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

Pertanto dall'equazione (2.2.27), i vettori colonna dell'inverso di una matrice rappresentano gli assi principali del sistema di riferimento rispetto al sistema di rotazione, e la sottomatrice 3×1 in alto a destra descrive la posizione dell'origine del sistema di riferimento in relazione a OUVW. Questa interpretazione geometrica delle matrici è un concetto rilevante, che useremo frequentemente in questo testo.

2.2.8 MATRICI DI TRASFORMAZIONE OMOGENEE COMPOSTE

Le matrici omogenee di rotazione e traslazione possono essere moltiplicate tra loro per ottenere una matrice composta (che chiameremo matrice \mathbf{T}). Comunque, data la non commutatività del prodotto tra matrici, occorre prestare molta attenzione all'ordine in cui queste vengono moltiplicate. Per trovare una matrice omogenea composta ci si avvarrà delle seguenti regole:

1. Inizialmente entrambi i sistemi di coordinate sono coincidenti, dunque la matrice di trasformazione ortogonale è una matrice identità 4×4 , \mathbf{I}_4 .
2. Se OUVW ruota/trasla intorno agli assi principali di OXYZ, allora andrà premoltiplicata la precedente (risultante) matrice per una appropriata matrice di rotazione/traslazione omogenea fondamentale.
3. Se il sistema OUVW ruota e trasla intorno ai suoi stessi assi principali, postmoltiplichiamo allora la precedente matrice con una appropriata matrice omogenea fondamentale di rotazione/traslazione.

ESEMPIO 2.6 Due punti $\mathbf{a}_{uvw} = (4, 3, 2)^T$ e $\mathbf{b}_{uvw} = (6, 2, 4)^T$ devono essere traslati di una distanza di +5 unità lungo l'asse x e di -3 unità lungo l'asse z . Usando l'appropriata matrice di trasformazione omogenea, determinare i nuovi punti \mathbf{a}_{xyz} e \mathbf{b}_{xyz} .

SOLUZIONE

$$\hat{\mathbf{a}}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1) + 1(5) \\ 3(1) + 1(0) \\ 2(1) + 1(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I punti traslati sono $\mathbf{a}_{xyz} = (9, 3, -1)^T$ e $\mathbf{b}_{xyz} = (11, 2, 1)^T$.

ESEMPIO 2.7 Vogliamo determinare una matrice \mathbf{T} che rappresenti una rotazione di angolo α intorno all'asse x , seguita da una traslazione di b unità lungo l'asse di rotazione v .

SOLUZIONE Questo problema può essere considerato difficile, ma dimostra l'uso di alcune delle componenti fondamentali della matrice \mathbf{T} . Ci avvarremo di due approcci, uno non ortodosso che è emblematico, e uno ortodosso, più semplice.

Dopo la rotazione $\mathbf{T}_{x,\alpha}$, l'asse di rotazione v è (in termini dei vettori unitari $\mathbf{i}_v, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_z$ del sistema di riferimento) $\mathbf{j}_v = \cos \alpha \mathbf{j}_y + \sin \alpha \mathbf{k}_z$; cioè la colonna 2 della (2.2.21). Perciò una traslazione di b unità lungo l'asse di rotazione v è $b\mathbf{j}_v = b \cos \alpha \mathbf{j}_y + b \sin \alpha \mathbf{k}_z$. Cosicché la matrice \mathbf{T} è:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{v,b} \mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & b \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nell'approccio ortodosso, seguendo le regole precedentemente stabilite, dovrebbe essere chiaro che, dal momento che la matrice $\mathbf{T}_{x,\alpha}$ ruoterà l'asse y fino a farlo coincidere con l'asse v , allora la traslazione lungo v raggiungerà lo stesso scopo, cioè,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{x,\alpha} \mathbf{T}_{v,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & b \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ESEMPIO 2.8 Trovare una matrice di trasformazione omogenea \mathbf{T} che rappresenti una rotazione di angolo α intorno all'asse x , seguita da una traslazione di a unità lungo x , cui fa seguito una traslazione di d unità lungo l'asse z , e infine una rotazione di angolo θ intorno a z .

SOLUZIONE

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{x,a} \mathbf{T}_{x,\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \cos \theta & a \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Abbiamo così identificato due sistemi di coordinate, il sistema di riferimento OXYZ e il sistema di coordinate mobile OUVW. Per descrivere la re-

lazione dello spostamento nello spazio tra questi due sistemi facciamo uso di una matrice di trasformazione omogenea 4×4 . Queste matrici producono l'effetto combinato di rotazione, traslazione, prospettiva e trasformazione di scala globale quando agiscono su vettori posizione espressi in coordinate omogenee.

Se questi due sistemi vengono assegnati a ogni link del braccio di un robot, per esempio il link $i-1$ e il link i , allora il sistema di coordinate del link $i-1$ sarà quello di riferimento e il sistema di coordinate del link i sarà quello mobile quando verrà attivato il giunto i . Utilizzando la matrice T , possiamo determinare un punto \mathbf{p}_i in quiete nel link i ed espresso nel sistema di coordinate del link i (od OUVW) in relazione al sistema di coordinate del link $i-1$ (od OXYZ) come:

$$\mathbf{p}_{i-1} = T \mathbf{p}_i \quad (2.2.28)$$

dove

T = matrice di trasformazione omogenea 4×4 che mette in relazione i due sistemi di coordinate.

\mathbf{p}_i = vettore posizione completo $(x_i, y_i, z_i, 1)^T$ che rappresenta un punto nel sistema di coordinate del link i espresso in coordinate omogenee.

\mathbf{p}_{i-1} = vettore completo 4×1 $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$ che rappresenta lo stesso punto \mathbf{p}_i in relazione al sistema di coordinate del link $i-1$.

2.2.9 SEGMENTI, GIUNTE E LORO PARAMETRI

Un manipolatore meccanico consiste in una sequenza di segmenti rigidi, chiamati link, connessi da giunti prismatici o di rotazione (vedi Figura 2.8). Ogni coppia giunto-link rappresenta un grado di libertà. Dunque, per un manipolatore con N gradi di libertà, ci sono N coppie giunto-link con il link 0 (non considerato parte del robot) ancorato a una base di appoggio dove di norma è stabilito per questo sistema dinamico un sistema di coordinate inerziale; all'ultimo link è collegato un utensile. I giunti e i link sono numerati in successione partendo dalla base; così il giunto 1 costituisce il punto di connessione fra l'elemento 1 e la base di supporto. Ogni link è connesso, al più, a due altri perché non si formino catene chiuse.

In generale, due link sono collegati fra loro con un giunto di *prima specie*, che presenta due superfici che slittano una sull'altra rimanendo a contatto. Sono possibili solo sei diversi tipi di giunti: rotazionali, prismatici (slittanti), cilindrici, sferici, elicoidali e planari (vedi Figura 2.9). Di questi, solo i giunti rotazionali e prismatici sono comuni nei manipolatori.

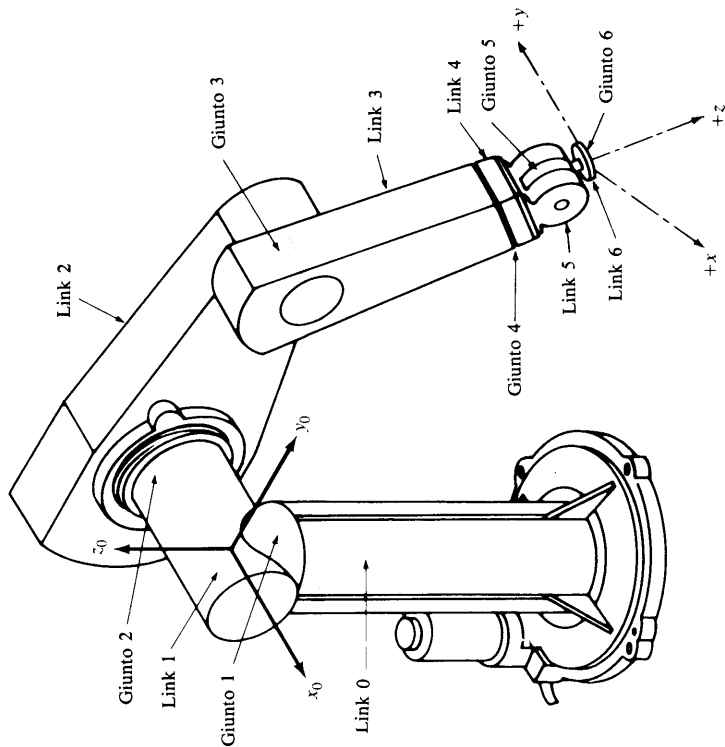


Figura 2.8 Braccio di un robot PUMA, in cui sono messi in evidenza giunti e link.

Un asse del giunto (per il giunto i) si definisce alla connessione dei due link (vedi Figura 2.10). Questo asse avrà due normali, una per ogni link. La posizione relativa di due elementi uniti in tal modo ($i-1$ e i) è data da d_i , che è la distanza misurata lungo l'asse del giunto fra le normali. L'angolo θ_i del giunto, compreso fra le normali, viene misurato su un piano normale all'asse del giunto. Dunque, d_i e θ_i possono essere chiamati rispettivamente distanza e angolo fra link adiacenti. Essi determinano la posizione relativa dei due link.

Un link i ($i = 1, \dots, 6$) è connesso, ripetiamo, al massimo ad altri due (cioè link $i-1$ e $i+1$); pertanto, sono stabiliti due assi del giunto per ambedue le estremità della connessione. Il significato dei link, considerati in un'ottica cinematica, è che essi mantengono una configurazione fissa tra i loro giunti che può essere caratterizzata da due parametri a_i e α_i . Il parametro a_i rappresenta la distanza più breve misurata lungo la normale comune

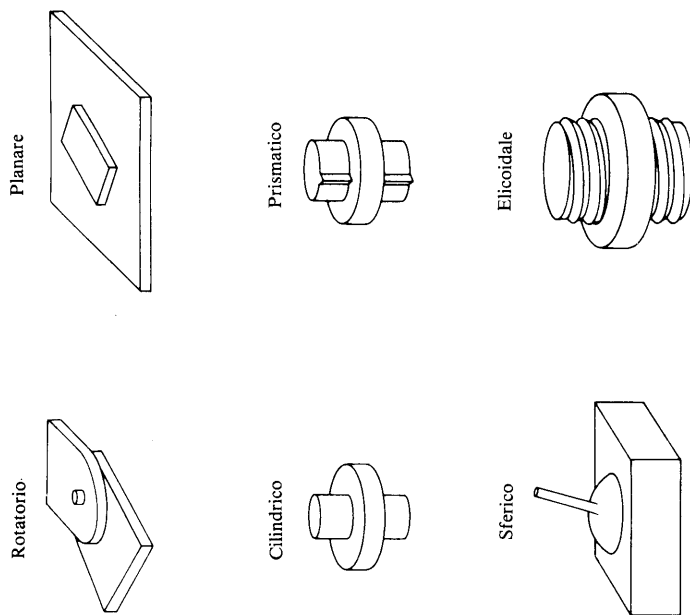


Figura 2.9 I giunti di prima specie.

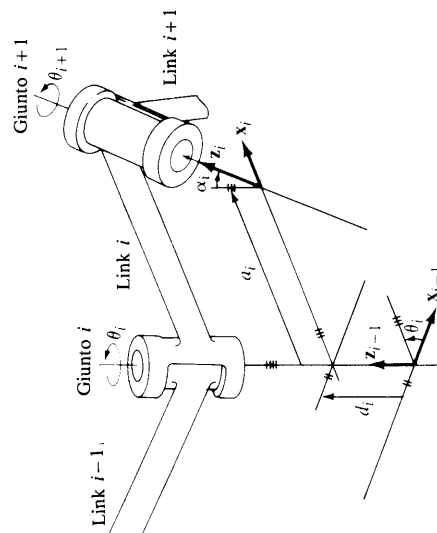


Figura 2.10 Sistemi di coordinate dei link e loro parametri.

tra gli assi dei giunti (cioè, gli assi z_{i-1} e z_i rispettivamente per i giunti i e $i+1$), e α_i è l'angolo compreso tra gli assi dei giunti su un piano perpendicolare ad a_i . Così, a_i e α_i possono essere chiamati rispettivamente lunghezza e angolo di rotazione del link i . Essi determinano la struttura di i .

Riassumendo, a ciascun link di un manipolatore sono associati quattro parametri: a_i , α_i , d_i e θ_i . Una volta stabilita una convenzione di segno per ognuno di essi, essi costituiscono un insieme sufficiente a determinare completamente la configurazione cinematica di ciascun anello della catena articolata del braccio. Va messo in evidenza che questi parametri vanno considerati a coppie: (a_i, α_i) , che determinano la struttura dei link, e (d_i, θ_i) , parametri dei giunti, che stabiliscono la posizione relativa dei link adiacenti.

2.2.10 RAPPRESENTAZIONE DI DENAVIT-HARTENBERG

Per descrivere le relazioni di traslazione e rotazione tra link adiacenti, Denavit e Hartenberg [1955] hanno proposto un metodo matriciale per stabilire sistematicamente un sistema di coordinate per ogni link di una catena articolata. La rappresentazione di Denavit-Hartenberg (D-H) consiste in una matrice di trasformazione omogenea 4×4 che rappresenta ogni sistema di coordinate dei link rispetto ai giunti con riferimento al link precedente. Pertanto, attraverso trasformazioni sequenziali, l'estremità dell'effettore espressa nelle coordinate della *mano* può essere trasformata ed espressa nelle "coordinate di base" che costituiscono il sistema di riferimento inerziale di questo sistema dinamico.

Si può stabilire un sistema di coordinate ortonormale $(x_i, y_i, z_i)^*$ per ogni link al suo asse del giunto, dove $i = 1, 2, \dots, n$ (n = numero dei gradi di libertà), più il sistema di coordinate fondamentale. Considerando che un giunto rotazionale ha un solo grado di libertà, ogni sistema di coordinate del braccio (x_i, y_i, z_i) corrisponde al giunto $i+1$ ed è stabilito sul link i . Quando l'attuatore attiva il giunto i , il link i si muove rispetto al link $i-1$. Dal momento che il sistema di coordinate i -esimo è fissato sul link i , esso si muove insieme al link. Così, il sistema n -esimo si muove insieme alla mano (link n). Le coordinate fondamentali sono definite sistema di coordinate 0-esimo x_0, y_0, z_0 che è anche il sistema di coordinate inerziale del braccio. Perciò, per un braccio a 6 assi di un robot tipo PUMA abbiamo 7 sistemi di coordinate, precisamente, $(x_0, y_0, z_0), \dots, (x_6, y_6, z_6)$. Ogni sistema di coordinate è determinato e stabilito in base a tre regole:

1. L'asse z_{i-1} giace lungo l'asse di movimento dell' i -esimo giunto.
2. L'asse x_i è normale all'asse z_{i-1} , ed è orientato in direzione opposta a esso.
3. L'asse y_i completa il sistema di coordinate della mano destra come richiesto.

* (x_i, y_i, z_i) rappresentano in realtà i versori degli assi del sistema di coordinate i ma vengono qui usati per identificare l'intero sistema di coordinate i .

Avvalendosi di queste regole, si è liberi di scegliere la posizione del sistema di coordinate 0 ovunque nella base di supporto, purché l'asse z_0 giaccia lungo l'asse di movimento del primo giunto. L'ultimo sistema di coordinate (sistema n -esimo) può essere posto ovunque nella mano, sempre che l'asse x_n sia normale all'asse z_{n-1} .

La rappresentazione D-H di un link rigido dipende da quattro parametri geometrici associati a ogni link; questi descrivono completamente tutti i giunti rotazionali o prismatici. Facendo riferimento alla Figura 2.10 essi sono definiti come segue:

θ_i è l'angolo del giunto dall'asse x_{i-1} all'asse x_i intorno a z_{i-1} (usando la regola della mano destra).

d_i è la distanza dall'origine del sistema di coordinate $(i-1)$ -esimo fino all'intersezione di z_{i-1} con x_i lungo z_{i-1} .

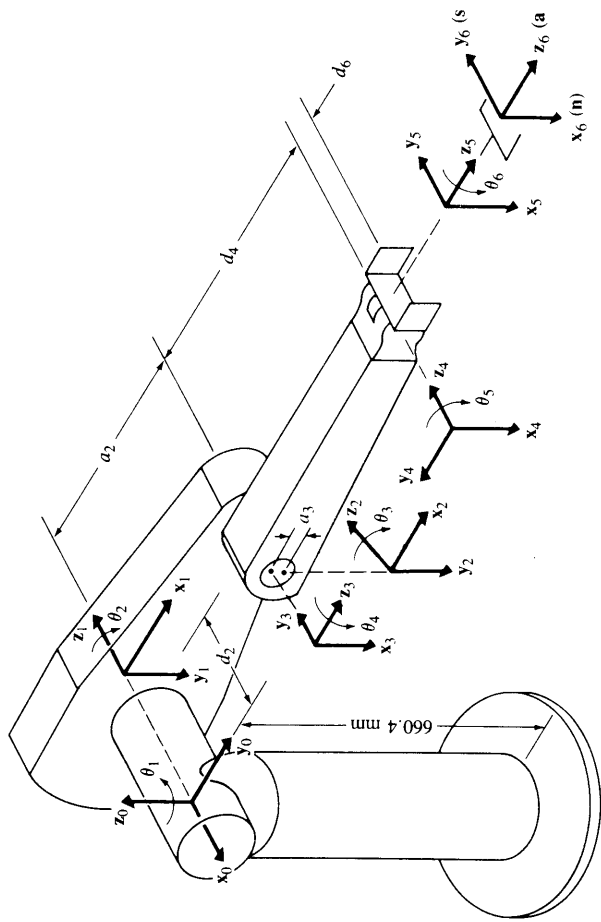
a_i è la distanza rilevata ortogonalmente dall'intersezione di z_{i-1} con x_i dall'origine del sistema i -esimo lungo l'asse x_i (o la distanza più breve tra gli assi z_{i-1} e z_i).

α_i è l'angolo misurato da z_{i-1} a z_i intorno a x_i (usando la regola della mano destra).

Per un giunto rotazionale, d_i , a_i e α_i sono i parametri del giunto e restano costanti per un dato robot, mentre θ_i è la variabile del giunto che cambia quando il link i si muove (o ruota) rispetto al link $i-1$. Per un giunto prismatico θ_i , a_i , e α_i sono i parametri del giunto e rimangono costanti, mentre d_i è la variabile del giunto. Da questo punto in avanti il termine *variabile del giunto* si riferisce a θ_i (o d_i) cioè alla quantità variabile, e *parametri del giunto* si riferisce ai valori delle tre costanti geometriche rimanenti (d_i , a_i , α_i) per un giunto rotazionale, o (θ_i , a_i , α_i) per un giunto prismatico.

Con le precedenti regole fondamentali per stabilire un sistema di coordinate ortotonormale per ogni link e con l'interpretazione geometrica dei parametri dei giunti e dei link, è mostrato nell'Algoritmo 2.1 un procedimento per rappresentare sistemi di coordinate ortotonormali *coerenti* per un robot. Nelle Figure 2.11 e 2.12 si trovano esempi di applicazione di questo algoritmo per ognuno dei sei assi di un braccio tipo PUMA.

ALGORITMO 2.1 IMPOSTAZIONE DI UN SISTEMA DI COORDINATE DEI LINK
 Dato un robot a n gradi di libertà, questo algoritmo assegna un sistema di coordinate ortotonormale a ogni link secondo una configurazione simile a quella del braccio umano. L'assegnamento dei sistemi di coordinate inizia dalla base di supporto e procede sino all'estremità dell'effettore. Le relazioni tra link adiacenti possono essere rappresentate da una matrice di trasformazione omogenea 4×4 . La significatività di questa attribuzione è di aiuto nello sviluppo di un procedimento logico per ricavare la soluzione dei giunti,



Parametri delle coordinate dei link per il braccio PUMA

Giunto i	θ_i	α_i	a_i	d_i	Escursione del giunto
1	90	-90	0	0	-160 to +160
2	0	0	431.8 mm	149.09 mm	-225 to 45
3	90	90	-20.32 mm	0	-45 to 225
4	0	-90	0	433.07 mm	-110 to 170
5	0	90	0	0	-100 to 100
6	0	0	0	56.25 mm	-266 to 266

Figura 2.11 Assegnamento dei sistemi di coordinate dei link per un robot PUMA.

come si mostrerà nei prossimi paragrafi. (È da rilevare come l'attribuzione dei sistemi di coordinate non sia univoca.)

1. *Determinare il sistema di coordinate fondamentale.* Stabilire un sistema di coordinate ortotonormale destrorso (x_0, y_0, z_0) sulla base di appoggio con l'asse z_0 giacente lungo l'asse di movimento del giunto 1 e diretto verso la spalla del robot. Gli assi x_0 e y_0 possono essere stabiliti come meglio conviene purché siano normali all'asse z_0 .

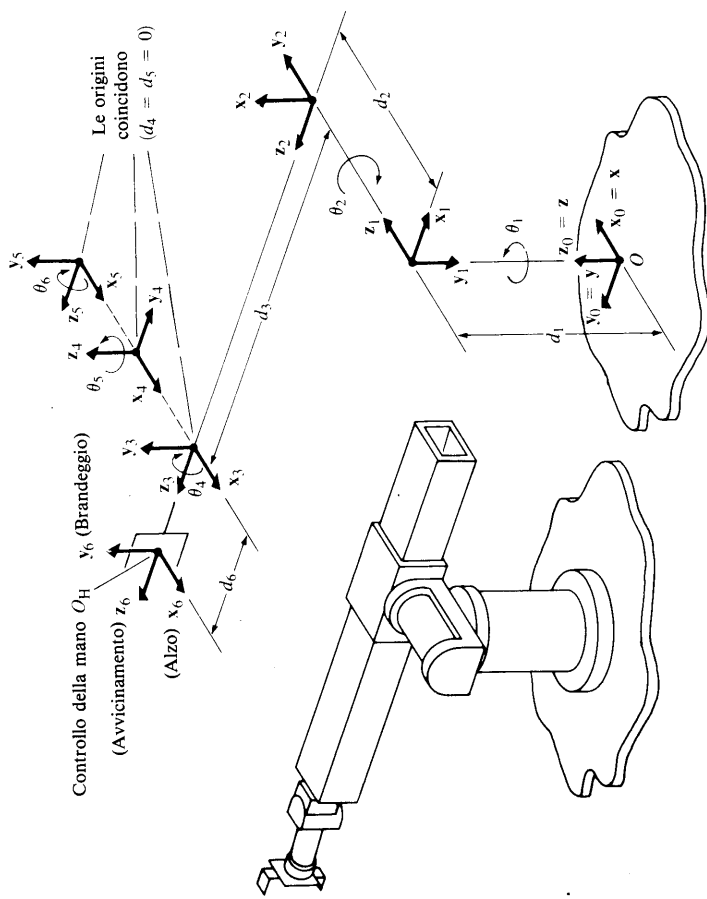


Figura 2.12 Assegnamento dei sistemi di coordinate dei link per uno Stanford Arm.

2. Inizializzare e iterare. Per ogni $i, i = 1, \dots, n-1$, effettuare le operazioni da 3 a 6.
3. Stabilire l'asse del giunto. Allineare z_i all'asse di movimento (di rotazione o slittamento) del giunto $i+1$. Per i robot aventi configurazione

a braccio sinistro o destro, gli assi z_i e z_2 sono orientati in direzione opposta alla spalla e al "tronco" del braccio.

4. Stabilire l'origine del sistema di coordinate i -esimo. Posizionare l'origine del sistema di coordinate i -esimo all'intersezione degli assi z_i e z_{i-1} o all'intersezione della normale comune agli assi z_i e z_{i-1} e l'asse z_i .
5. Determinare l'asse x_i . Stabilire $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i) / \|z_{i-1} \times z_i\|$ o lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i quando sono paralleli.
6. Determinare l'asse y_i . Assegnare $y_i = \pm(z_i \times x_i) / \|z_i \times x_i\|$ per completare il sistema di coordinate destrorso. (Posizionare gli assi z_i e x_i , se necessari per le istruzioni da 9 a 12.)
7. Stabilire il sistema di coordinate della mano. Di solito il giunto n -esimo è rotazionale. Stabilire z_n lungo la direzione dell'asse z_{n-1} e pertanto in direzione opposta al robot. Stabilire x_n tale che sia normale agli assi z_{n-1} e z_n . Assegnare y_n per completare il sistema di coordinate destrorso. (Vedi Paragrafo 2.2.11 per ulteriori dettagli.)
8. Trovare i parametri dei giunti e dei link. Per ogni $i, i = 1, \dots, n$, effettuare le operazioni da 9 a 12.
9. Trovare d_i . d_i è la distanza dall'origine dell' $(i-1)$ -esimo sistema di coordinate all'intersezione con gli assi z_{i-1} e x_i lungo l'asse z_{i-1} . Essa è la variabile del giunto i se il giunto è prismatico.
10. Trovare a_i . a_i è la distanza dall'intersezione degli assi z_{i-1} e x_i all'origine del sistema di coordinate i -esimo lungo l'asse x_i .
11. Trovare θ_i . θ_i è l'angolo di rotazione dall'asse x_{i-1} all'asse x_i intorno all'asse z_{i-1} . Questa è la variabile del giunto se esso è rotazionale.
12. Trovare α_i . Si tratta dell'angolo di rotazione dall'asse z_{i-1} all'asse z_i intorno a x_i .

Stabilito il sistema di coordinate di D-H per ogni link, si può sviluppare facilmente una matrice di trasformazione omogenea che metta in relazione il sistema di coordinate i -esimo col sistema di coordinate $(i-1)$ -esimo. Osservando la Figura 2.10, appare evidente che un punto r_i espresso nel sistema di coordinate i -esimo può essere espresso nel sistema di coordinate $(i-1)$ -esimo come r_{i-1} , effettuando le seguenti trasformazioni in successione:

1. Ruotare intorno all'asse z_{i-1} di un angolo θ_i per allineare l'asse x_{i-1} all'asse x_i con x_{i-1} e x_i paralleli e rivolti nella stessa direzione.
2. Traslare di una quantità d_i lungo l'asse z_{i-1} per portare gli assi x_{i-1} e x_i sulla stessa retta.
3. Traslare di una quantità a_i lungo x_i per portare le due origini e gli assi x a coincidere.
4. Ruotare intorno all'asse x_i di un angolo α_i perché si verifichi la coincidenza dei due sistemi di coordinate.

Si può esprimere ciascuna di queste quattro operazioni con una matrice di rotazione/traslazione omogenea e il prodotto delle quattro matrici di trasformazione fondamentali ortogonali produce una matrice di trasformazione omogenea composta, ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, nota come matrice di trasformazione di D-H per sistemi di coordinate adiacenti, i e $i-1$. Così,

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{x,d} \mathbf{T}_{x,\alpha} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.29)
 \end{aligned}$$

Usando la (2.2.27), si può trovare l'inverso di questa trasformazione:

$$[{}^{i-1}\mathbf{A}_i]^{-1} = {}^i\mathbf{A}_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.30)$$

dove α_i , a_i , d_i sono costanti mentre θ_i è la variabile per un giunto rotazionale. Per un giunto prismatico, la variabile di giunto è d_i , mentre α_i , a_i e θ_i sono costanti. In questo caso ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ diventa:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_{z,\theta} \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.31)$$

e il suo inverso è:

$$[{}^{i-1}\mathbf{A}_i]^{-1} = {}^i\mathbf{A}_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.32)$$

Utilizzando la matrice ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, possiamo mettere in relazione un punto \mathbf{p}_i appartenente al link i , ed espresso in coordinate omogenee rispetto al sistema di coordinate i , al sistema di coordinate $i-1$ stabilito nel link $i-1$ con:

$$\mathbf{p}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{A}_i \mathbf{p}_i \quad (2.2.33)$$

dove $\mathbf{p}_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$ e $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$. Le sei matrici di trasformazione ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ per il braccio di un PUMA a sei assi sono state trovate in base ai sistemi di coordinate mostrati nella Figura 2.11. Queste matrici ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ sono riportate nella Figura 2.13.

2.2.11 EQUAZIONI CINEMATICHE PER I MANIPOLATORI

La matrice omogenea ${}^0\mathbf{T}_i$ che specifica la posizione del sistema di coordinate i -esimo rispetto al sistema di coordinate fondamentale è il prodotto a catena delle successive matrici di trasformazione delle coordinate di ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, ed è espressa come:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{T}_i &= {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \cdots {}^{i-1}\mathbf{A}_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}\mathbf{A}_j \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n \\
 &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_i & {}^0\mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.34)
 \end{aligned}$$

dove

$[x_i, y_i, z_i]$ = matrice di orientamento del sistema di coordinate i -esimo stabilito sul link i rispetto al sistema di coordinate fondamentale. Si tratta della sottomatrice 3×3 in alto a sinistra di ${}^0\mathbf{T}_i$.

\mathbf{p}_i = vettore posizione che punta dall'origine del sistema di coordinate i -esimo fondamentale all'origine del sistema di coordinate i -esimo. Si tratta della sottomatrice 3×1 in alto a destra di ${}^0\mathbf{T}_i$.

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 \equiv {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 \equiv {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 - C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 - S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $C_i \equiv \cos \theta_i$; $S_i \equiv \sin \theta_i$; $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$; $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$.

Figura 2.13 Matrici di trasformazione delle coordinate dei link del PUMA.

Più precisamente, per $i = 6$ otteniamo la matrice $T = {}^0A_6$, che specifica la posizione e l'orientamento dell'estremità del manipolatore rispetto al sistema di coordinate fondamentale. Questa matrice T è utilizzata così frequentemente da chiamarsi "matrice del braccio". Consideriamo la matrice T nella forma:

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0P_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.35)$$

dove (vedi Figura 2.14):

- n = vettore normale della mano. Ipotizzando una mano ad apertura parallela, esso sarà ortogonale al piano che contiene le dita del robot.
- s = vettore apertura della mano. Esso è orientato secondo il movimento delle dita quando la pinza si apre e si chiude.

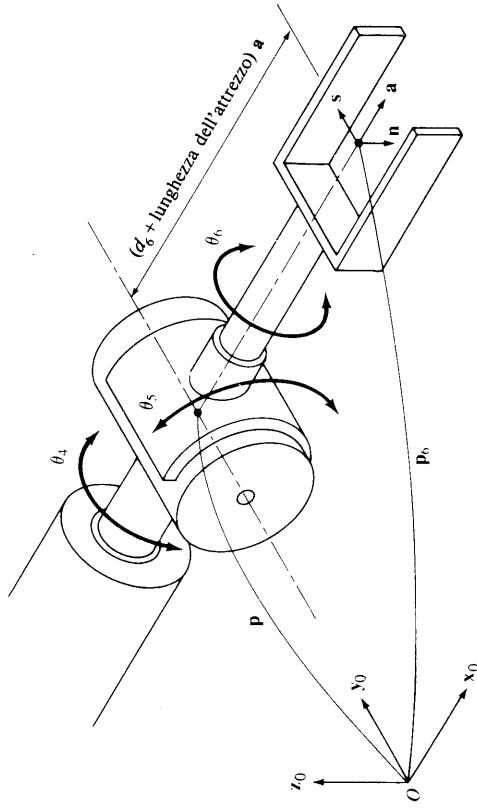


Figura 2.14 Sistema di coordinate della mano e $[n, s, a]$.

\mathbf{a} = vettore avvicinamento della mano. Esso è direzionato seguendo la normale del palmo della mano (cioè normale alla base di montaggio dell'attrezzo sul braccio).

\mathbf{p} = vettore posizione della mano. Esso si dirige dall'origine del sistema di coordinate fondamentale all'origine del sistema di coordinate della mano, che è situato solitamente nel punto centrale delle dita completamente chiuse.

Se il manipolatore è messo in relazione a un sistema di coordinate di riferimento per mezzo di una trasformazione \mathbf{B} e ha una pinza ancorata al suo supporto di montaggio dell'ultimo giunto indicato da \mathbf{H} , allora l'estremità può essere messa in relazione col sistema di riferimento moltiplicando fra loro le matrici \mathbf{B} , ${}^0\mathbf{T}_6$ e \mathbf{H} , in questo modo:

$${}^{\text{ref}}\mathbf{T}_{\text{tool}} = \mathbf{B} {}^0\mathbf{T}_6 \mathbf{H} \quad (2.2.36)$$

Si noti che $\mathbf{H} \equiv {}^6\mathbf{A}_{\text{tool}}$ e $\mathbf{B} \equiv {}^{\text{ref}}\mathbf{A}_0$.

La soluzione cinematica diretta di un manipolatore a 6 link è, quindi, riducibile semplicemente al calcolo di $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_6$ moltiplicando a catena le sei matrici ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ e valutando ogni elemento della matrice \mathbf{T} . Dobbiamo rilevare che tale soluzione cinematica produce un'unica matrice \mathbf{T} per un dato $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_6)^T$ e un dato insieme di sistemi di coordinate, dove $q_i = \theta_i$ per un giunto rotazionale e $q_i = d_i$ per un giunto prismatico. I suoi vincoli sono i legami fisici di θ_i per ogni giunto del braccio. La tabella in Figura 2.11 elenca i limiti degli spostamenti dei giunti di un robot della serie PUMA 560 basandosi sul sistema di coordinate assegnato nella figura stessa.

Una volta ottenute tutte le matrici di trasformazione delle coordinate del braccio ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$, il problema successivo è trovare un metodo efficiente per calcolare \mathbf{T} su un calcolatore digitale per impieghi generali. Il metodo più efficiente è moltiplicare fra loro manualmente tutte e sei le matrici ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ e valutare gli elementi della matrice \mathbf{T} esplicitamente con un programma opportuno. Gli svantaggi di questo metodo sono che è laborioso moltiplicare fra loro le sei matrici, e che la matrice del braccio è applicabile solo a un particolare robot per un insieme specifico di sistema di coordinate (non è sufficientemente flessibile). D'altra parte, si possono inserire le sei matrici ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ e lasciare che il calcolatore esegua la moltiplicazione. Questo metodo è molto elastico ma a spese del tempo necessario al calcolo, poiché la quarta riga di ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ consiste per lo più di elementi pari a 0.

Un metodo che offre sia rapidità di calcolo sia flessibilità consiste nel moltiplicare insieme manualmente le prime tre matrici ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ per costituire $\mathbf{T}_1 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$ e anche le ultime 3 matrici fra loro per avere $\mathbf{T}_2 =$

${}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6$, che è un lavoro piuttosto semplice. Poi, immettiamo gli elementi di \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 in un programma e lasciamo che il calcolatore moltiplichi le due matrici per ottenere la matrice del braccio $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$. Per un PUMA serie 560, dalla Figura 2.13 si ricava che \mathbf{T}_1 è:

$$\mathbf{T}_1 = {}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \quad (2.2.37)$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 & 0 & 0 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 & 0 & 0 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e la matrice \mathbf{T}_2 è:

$$\mathbf{T}_2 = {}^3\mathbf{A}_6 = {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 \quad (2.2.38)$$

$$= \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$ e $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$.

La matrice \mathbf{T} del braccio mostrata nella Figura 2.11 è dunque:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.39)$$

dove:

$$n_x = C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6)$$

$$n_y = S_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \quad (2.2.40)$$

$$n_z = -S_{23}[C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6] - C_{23} S_5 C_6$$

$$s_x = C_1[-C_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)$$

$$s_y = S_1[-C_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] + C_1(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6)$$

$$s_z = S_{23}(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6 \quad (2.2.41)$$

$$a_x = C_1(C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5$$

$$a_y = S_1(C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5 \quad (2.2.42)$$

$$a_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5$$

$$p_x = C_1[d_6(C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_3 C_{23} + a_2 C_2] - S_1(d_6 S_4 S_5 + d_2)$$

$$p_y = S_1[d_6(C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_3 C_{23} + a_2 C_2] + C_1(d_6 S_4 S_5 + d_2)$$

$$p_z = d_6(C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + C_{23} d_4 - a_3 S_{23} - a_2 S_2 \quad (2.2.43)$$

Come verifica, se $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$, $\theta_4 = 0^\circ$, $\theta_5 = 0^\circ$, $\theta_6 = 0^\circ$, allora la matrice \mathbf{T} è:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -149.09 \\ 0 & 0 & 1 & 921.12 \\ -1 & 0 & 0 & 20.32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in accordo con i sistemi di coordinate fissati in Figura 2.11.

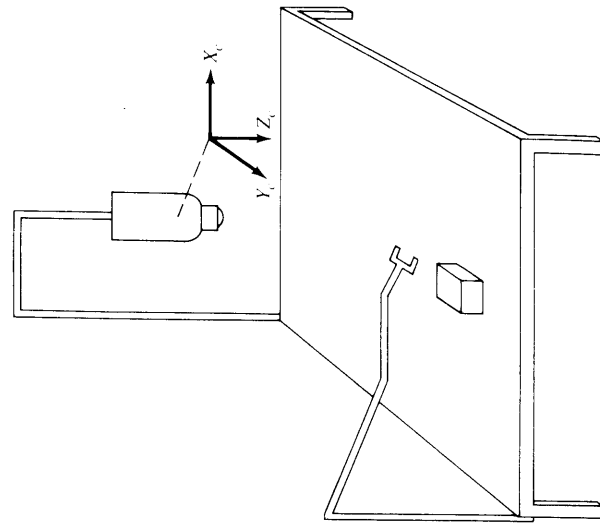
Per le equazioni da (2.2.40) a (2.2.43), la matrice \mathbf{T} richiede 12 calcoli di funzioni trascendenti, 40 moltiplicazioni e 20 addizioni se consideriamo soltanto la sottomatrice 3×3 di \mathbf{T} in alto a destra, e il vettore normale n si può ricavare dal prodotto vettoriale di $(n = s \times a)$. Inoltre, se combiniamo d_6 con la lunghezza dell'attrezzo, allora sarà $d_6 = 0$, e la nuova lunghezza dell'attrezzo aumenterà di d_6 unità. Ciò riduce il calcolo a 12 valutazioni di funzioni trascendenti, 35 moltiplicazioni e 16 addizioni.

ESEMPIO Una stazione di lavoro è stata dotata di una telecamera (vedi figura). La telecamera può vedere l'origine del sistema di coordinate fondamentale al quale è associato un robot a 6 giunti. Essa vede anche il

centro di un oggetto (che nell'esempio è un cubo) manipolato dal robot. Se è stato stabilito un sistema di coordinate locale al centro del cubo, questo oggetto osservato dalla telecamera può essere rappresentato da una matrice di trasformazione omogenea \mathbf{T}_1 . Se l'origine del sistema di coordinate fondamentale visto dall'obiettivo può essere espressa anche da una matrice di trasformazione omogenea \mathbf{T}_2 e

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Qual è la posizione del centro del cubo rispetto al sistema di coordinate fondamentale?
 (b) Supponiamo che il cubo sia entro il raggio d'azione del braccio. Qual è la matrice di orientamento $[n, s, a]$ se vogliamo che la pinza (o il dito) della mano si allinei all'asse y dell'oggetto e contemporaneamente afferri l'oggetto dall'alto?



SOLUZIONE:

$$\text{camera } \mathbf{T}_{\text{cube}} \equiv \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\text{camera } \mathbf{T}_{\text{base}} \equiv \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare $\text{base } \mathbf{T}_{\text{cube}}$, ci avvaliamo della regola del "prodotto a catena":

$$\text{base } \mathbf{T}_{\text{cube}} = \text{base } \mathbf{T}_{\text{camera}} \text{ camera } \mathbf{T}_{\text{cube}} = (\mathbf{T}_2)^{-1} \mathbf{T}_1$$

Utilizzando la (2.2.27) per invertire la matrice \mathbf{T}_2 , otteniamo la matrice di trasformazione risultante:

$$\text{base } \mathbf{T}_{\text{cube}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque, il cubo è nella posizione (11, 10, 1)^T del sistema di coordinate fondamentale. I suoi assi x , y e z sono paralleli rispettivamente agli assi $-y$, x e z del sistema di coordinate fondamentale. Per trovare $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$, ci avvaliamo di:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{p} = (11, 10, 1)^T$ dalla precedente soluzione. Considerando la figura di questo esempio, vogliamo che il vettore avvicinamento \mathbf{a} si allinei alla direzione negativa dell'asse z del sistema di coordinate fondamentale [cioè, $\mathbf{a} = (0, 0, -1)^T$]; il vettore \mathbf{s} può essere allineato in ciascuna delle direzioni dell'asse y della matrice $\text{base } \mathbf{T}_{\text{cube}}$ [cioè, $\mathbf{s} = (\pm 1, 0, 0)^T$]; e il vettore \mathbf{n} si ottiene dal prodotto vettoriale di \mathbf{s} e \mathbf{a} :

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & | & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ s_x & s_y & s_z & | & \pm 1 & 0 & 0 \\ a_x & a_y & a_z & | & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice di orientamento $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$ è:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2.12 ULTERIORI ELEMENTI RELATIVI ALLA POSIZIONE DELL'ESTREMITÀ DELL'EFFETTORE

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato le traslazioni e le rotazioni di corpi rigidi (\mathbf{o} link) e abbiamo introdotto la matrice di trasformazione omogenea per determinare la posizione e l'orientamento di un sistema di coordinate del link. Riveste particolare interesse la matrice ${}^0\mathbf{T}_6$ che descrive posizione e orientamento della mano rispetto al sistema di coordinate fondamentale. La sottomatrice 3×3 in alto a sinistra di ${}^0\mathbf{T}_6$ ci fornisce l'orientamento della mano. Questa sottomatrice di rotazione è equivalente a ${}^0\mathbf{R}_6$. Vi sono altri modi per indicare la posizione dell'estremità dell'effettore (\mathbf{o} pinza).

Rappresentazione dell'orientamento secondo gli angoli di Eulero. Come descritto nel Paragrafo 2.2.4, questa rappresentazione matriciale per la rotazione di un corpo rigido semplifica molte operazioni ma non conduce direttamente a un insieme completo di coordinate generalizzate. Tale insieme può essere fornito da tre angoli di Eulero (ϕ , θ e ψ).

Utilizzando la matrice di rotazione nella rappresentazione secondo gli angoli euleriani come nella (2.2.17), la matrice del braccio ${}^0\mathbf{T}_6$ si può esprimere nel seguente modo:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta & P_x \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta & P_y \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.44)$$

Un altro vantaggio insito nell'uso di tale rappresentazione è che gli elementi necessari per posizionare e orientare un oggetto si riducono a un vettore a 6 elementi $XYZ\phi\theta\psi$. Partendo da questo vettore si può costituire la matrice del braccio ${}^0\mathbf{T}_6$ grazie alla (2.2.44).

Rappresentazione dell'orientamento con rollio, beccheggio e imbardata.

Un altro tipo di rappresentazione euleriana della rotazione si basa su rollio, beccheggio e imbardata. Anche in questo caso, usando la (2.2.19), si può utilizzare la matrice che li rappresenta, per ottenere ${}^0\mathbf{T}_6$:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & P_x \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & P_y \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.45)$$

Come è stato detto nel Capitolo 1 vi sono diversi modelli di bracci di robot che si distinguono in base al moto dei giunti (cartesiani, cilindrici, sferici e articolati). Si può perciò esprimere la posizione della mano $(P_x, P_y, P_z)^T$ in altre coordinate, cilindriche o sferiche. La matrice di trasformazione risultante si può avere da:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{R}_6 \quad (2.2.46)$$

dove ${}^0\mathbf{R}_6$ = matrice rotazionale, espressa sia in angoli euleriani sia in termini di rollio, beccheggio e imbardata.

Coordinate cilindriche per il sottogruppo di posizionamento. In una rappresentazione in coordinate cilindriche, la posizione della pinza può essere specificata dalle seguenti traslazioni e rotazioni (vedi Figura 2.15):

1. Traslazione di r unità lungo l'asse x ($\mathbf{T}_{x,r}$)
2. Rotazione di angolo α intorno all'asse z ($\mathbf{T}_{z,\alpha}$)
3. Traslazione di d unità lungo l'asse z ($\mathbf{T}_{z,d}$)

La matrice che rappresenta le operazioni precedenti può essere così espressa:

$$\mathbf{T}_{\text{cylindrical}} = \mathbf{T}_{z,d} \mathbf{T}_{z,\alpha} \mathbf{T}_{x,r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rC\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rC\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.47)$$

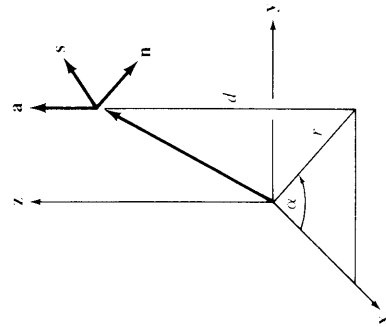


Figura 2.15 Rappresentazione del sistema di coordinate cilindriche.

Dal momento che siamo interessati ai soli vettori posizione (per esempio la quarta colonna di $\mathbf{T}_{cy(\text{indricale})}$), la matrice ${}^0\mathbf{T}_6$ del braccio può essere ottenuta dalla (2.2.46):

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_6 \quad (2.2.48)$$

e $p_x \equiv rC\alpha$, $p_y \equiv rS\alpha$, $p_z \equiv d$.

Coordinate sferiche per il sottogruppo di posizionamento. Possiamo utilizzare anche il sistema di coordinate sferiche per indicare la posizione dell'estremità dell'effettore. Ciò implica le seguenti traslazioni e rotazioni (vedi Figura 2.16):

1. Traslazione di r unità lungo l'asse z ($\mathbf{T}_{z,r}$)
2. Rotazione di angolo β intorno a y ($\mathbf{T}_{y,\beta}$)
3. Rotazione di angolo α intorno a z ($\mathbf{T}_{z,\alpha}$)

La matrice di trasformazione per le operazioni precedenti è:

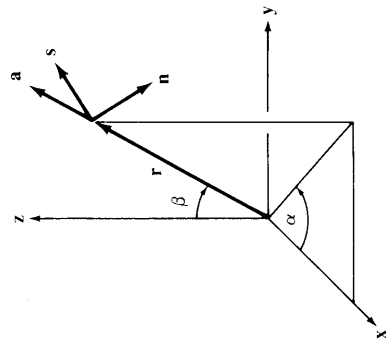


Figura 2.16 Rappresentazione del sistema di coordinate sferiche.

$$\mathbf{T}_{s,ph} = \mathbf{T}_{z,\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{T}_{z,r} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & -S\alpha & C\alpha S\beta & rC\alpha S\beta \\ S\alpha C\beta & C\alpha & S\alpha S\beta & rS\alpha S\beta \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.49)$$

Ancora una volta, ci interessa il vettore posizione rispetto al sistema di coordinate fondamentale; pertanto la matrice ${}^0\mathbf{T}_6$ del braccio, il cui vettore posizione è espresso in coordinate sferiche e la cui matrice di orientamento è espressa in $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$ o in angoli di Eulero o in rollio, beccheggio e imbardata, può essere ottenuta da:

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha S\beta \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha S\beta \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_6 \quad (2.2.50)$$

dove $p_x \equiv rC\alpha S\beta$, $p_y \equiv rS\alpha S\beta$, $p_z \equiv rC\beta$. Riassumendo, sono molti i metodi (o sistemi di coordinate) che si possono scegliere per specificare la posizione e l'orientamento dell'estremità dell'effettore. Per il posizionamento, il vettore posizione può essere espresso in termini di riferimento cartesiani $(p_x, p_y, p_z)^T$, cilindrici $(rC\alpha, rS\alpha, d)^T$ o sferici $(rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta)^T$. Per descrivere l'orientamento dell'estremità dell'effettore rispetto al sistema di coordinate fondamentale, abbiamo a disposizione le coordinate cartesiane $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$, gli angoli di Eulero (ϕ, θ, ψ) , e (rollio, beccheggio, imbardata). Il risultato della precedente dissertazione è riportato nella Tabella 2.2.

2.2.13 CLASSIFICAZIONE DEI MANIPOLATORI

Un manipolatore è costituito da un gruppo di corpi rigidi o link, di cui il primo è fissato a una base di supporto mentre l'ultimo accoglie la pinza.

Tabella 2.2 Le diverse rappresentazioni di posizione e orientamento.

Posizione	Orientamento
Cartesiano (p_x, p_y, p_z) ^T	Cartesiano [n, s, a]
Cilindrico ($rC\alpha, rS\alpha, d$) ^T	Angoli di Eulero (ϕ, θ, ψ)
Sferico ($rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta$) ^T	Rollio, beccheggio, imbardata

$$T_{\text{position}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{\text{rot}} = \begin{bmatrix} [n, s, a] \text{ or } R_{\phi, \theta, \psi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_6 = T_{\text{position}} T_{\text{rot}}$$

Inoltre, ogni link è connesso al massimo ad altri due in modo da non formare anelli chiusi. Abbiamo in precedenza assunto che gli elementi di unioni dei link (i giunti) sono dotati di un solo grado di libertà. Con questa limitazione, sono per noi interessanti due tipi di giunti: rotazionali e prismatici. I primi consentono la rotazione intorno a un asse, mentre gli altri permettono lo slittamento senza rotazione (il giunto in cui lo slittamento è contemporaneo alla rotazione è chiamato elicoidale). I link sono collegati in modo da essere obbligati a muoversi l'uno rispetto all'altro per posizionare l'estremità dell'effettore (mano o attrezzo o pinza) in una particolare posizione e orientamento.

Quindi un manipolatore, considerato come una combinazione di link e giunti con il primo link fissato alla base e l'ultimo dotato di una sorta di mano, può essere classificato secondo il tipo di giunti e il loro ordine (dalla base alla mano). Tenendo presente questa convenzione, il braccio PUMA può essere classificato come 6R e lo Stanford arm come 2R-P-3R dove R è un giunto rotazionale e P è prismatico.

2.3 IL PROBLEMA DELLA CINEMATICA INVERSA

Questo paragrafo è incentrato sul secondo problema della cinematica del braccio: la cinematica inversa (IK), o soluzione del braccio per un manipolatore a sei giunti. I robot controllati da calcolatore sono di norma controllati nello spazio dei giunti mentre gli oggetti da manipolare sono solitamente espressi nel sistema di coordinate universale. Per controllare la posizione e l'orientamento dell'estremità dell'effettore di un robot in modo che rag-

giunga il suo bersaglio, la soluzione della cinematica inversa è la più importante. Vale a dire, dati posizione e orientamento della pinza di un braccio a sei assi, come 0T_6 e i parametri dei suoi giunti e link, vogliamo trovare i corrispondenti angoli dei giunti $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$ così da poter posizionare a piacere l'estremità dell'effettore.

In generale, il problema della cinematica inversa può essere risolto con diversi metodi quali la trasformazione inversa (Paul et al. [1981]), l'algebra elicoidale (Kohli e Soni [1975]), matrici doppie (Denavit [1956]), quaternioni (Yang e Freudenstein [1964]) e approcci iterativi (Uicker et al. [1964]) e geometrici (Lee e Ziegler [1984]). Pieper [1968] ha presentato la soluzione cinematica per qualunque manipolatore con sei gradi di libertà che abbia coppie prismatiche o di rotazione per i primi tre giunti e gli assi degli ultimi tre giunti intersecantisi in un punto. La soluzione può essere espressa con un polinomio di quarto grado in una incognita e in una soluzione in forma chiusa per le restanti incognite. Paul et al. [1981] hanno presentato una tecnica di trasformazione inversa usando matrici di trasformazione ortogonali 4×4 per risolvere il problema cinematico del braccio per semplici manipolatori della stessa classe di quelli trattati da Pieper. Sebbene la soluzione sia corretta, nuoce il fatto che non fornisca una chiara indicazione su come selezionare la soluzione appropriata fra le molte possibili per una particolare configurazione del braccio. L'utente spesso deve giungere con la propria intuizione a trovare la risposta adeguata. Tratteremo in questa sede l'approccio di Pieper per risolvere il problema della soluzione inversa con gli angoli di Eulero. Uicker et al. [1964] e Milenkovic e Huang [1983] hanno presentato soluzioni iterative per la maggior parte dei robot industriali. La soluzione iterativa richiede spesso più calcoli e non garantisce l'approdo a una soluzione corretta, specialmente nei casi particolari e degeneri. Inoltre, come con la tecnica di trasformazione inversa, non c'è indicazione su come scegliere la soluzione corretta per una particolare configurazione del braccio. È auspicabile trovare una soluzione in forma chiusa per i manipolatori. Fortunatamente, la maggior parte dei robot commerciali ha una o l'altra delle seguenti condizioni sufficienti che rendono possibile tale soluzione:

1. Tre assi di giunti adiacenti intersecanti.
2. Tre assi di giunti adiacenti paralleli fra loro.

I PUMA e gli Stanford arm soddisfano la prima condizione mentre i bracci dei robot ASEA e MINIMOVER rispondono positivamente alla seconda condizione.

Dalla Equazione (2.2.39) abbiamo la matrice di trasformazione del braccio che possiamo esprimere come:



$$\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6 \quad (2.3.1)$$

L'equazione precedente indica che la matrice \mathbf{T} è funzione di seni e coseni di $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$. Per esempio, per il PUMA, eguagliando gli elementi delle equazioni matriciali come nelle equazioni da (2.2.40) a (2.2.43), abbiamo dodici equazioni in sei incognite (gli angoli dei giunti) e queste equazioni comportano funzioni trigonometriche complesse. Dato che abbiamo più equazioni che incognite, si potrebbe concludere subito che esistono soluzioni multiple. Esporremo due metodi per trovare la soluzione inversa: la tecnica della trasformazione inversa, per trovare la soluzione degli angoli di Eulero, che può essere usata anche per trovare la soluzione dei giunti del PUMA, e un approccio geometrico che fornisce maggior capacità nella risoluzione di semplici manipolatori con giunti rotazionali.

2.3.1 TECNICA DI TRASFORMAZIONE INVERSA PER LA SOLUZIONE DEGLI ANGOLI DI EULERO

In questo paragrafo esporremo i concetti fondamentali della tecnica della trasformazione inversa applicandola agli angoli di Eulero. Poiché una matrice di rotazione 3×3 può essere espressa in angoli euleriani (ϕ, θ, ψ) come nella (2.2.17), e data la

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{u,\theta} \mathbf{R}_{w,\psi} \\ = \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

vogliamo trovare il valore corrispondente di ϕ, θ, ψ . Eguagliando gli elementi dell'equazione matriciale precedente abbiamo:

$$n_x = C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi \quad (2.3.3a)$$

$$n_y = S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi \quad (2.3.3b)$$

$$n_z = S\theta S\psi \quad (2.3.3c)$$

$$s_x = -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi \quad (2.3.3d)$$

$$s_y = -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi \quad (2.3.3e)$$

$$s_z = S\theta C\psi \quad (2.3.3f)$$

$$a_x = S\phi S\theta \quad (2.3.3g)$$

$$a_y = -C\phi S\theta \quad (2.3.3h)$$

$$a_z = C\theta \quad (2.3.3i)$$

Servendoci delle equazioni (2.3.3f), (2.3.3g) e (2.3.3h), una soluzione per le precedenti nove equazioni è:

$$\theta = \cos^{-1}(a_z) \quad (2.3.4)$$

$$\psi = \cos^{-1} \left[\frac{s_z}{S\theta} \right] \quad (2.3.5)$$

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{-a_y}{S\theta} \right] \quad (2.3.6)$$

La soluzione di cui sopra è inconsistente e lacunosa perché:

1. La funzione arcocoseno non si adatta bene, in quanto la sua accuratezza nel determinare l'angolo dipende dall'angolo stesso. Cioè, $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$.
2. Quando $\sin(\theta)$ si avvicina a zero, cioè, $\theta = 0^\circ$ o $\theta = \pm 180^\circ$, le equazioni (2.3.5) e (2.3.6) forniscono soluzioni imprecise o sono indefinite.

Dobbiamo quindi ricercare un approccio più valido per determinare la soluzione degli angoli di Eulero e una più utile funzione trigonometrica per valutare la soluzione degli angoli. Per trovare il valore di θ per $-\pi \leq \theta \leq \pi$, useremo una funzione arcotangente $\text{atan2}(y,x)$, che fornisce $\tan^{-1}(y/x)$ situata nel quadrante appropriato. Essa è definita come:

$$\theta = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ & \text{per } +x \text{ e } +y \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \text{per } -x \text{ e } +y \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ & \text{per } -x \text{ e } -y \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ & \text{per } +x \text{ e } -y \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Utilizzando la funzione arcotangente (atan2) con due argomenti, daremo uno sguardo a una soluzione generale proposta da Paul et al. [1981]. Dall'equazione matriciale nella (2.3.2) sono dati gli elementi della matrice a sinistra dell'uguale nell'equazione matriciale, mentre gli elementi delle tre matrici a destra dell'uguale non sono noti e dipendono da ϕ , θ , ψ . Paul et al. [1981] hanno proposto di *premultiplicare* la precedente equazione matriciale per le successive trasformazioni inverse delle sue incognite, mentre dagli elementi dell'equazione matriciale risultante si determina l'angolo incognito. Cioè, spostiamo un'incognita (con la sua trasformazione inversa) da destra a sinistra nell'equazione matriciale e risolviamo in funzione dell'incognita, quindi spostiamo l'incognita successiva a sinistra dell'uguale e ripetiamo l'operazione finché tutte le incognite siano state trovate.

Premoltiplicando l'equazione matriciale precedente per $\mathbf{R}_{z,\phi}^{-1}$, abbiamo un'incognita (ϕ) a sinistra e due (θ , ψ) a destra dell'uguale nell'equazione, cosicché la situazione sarà:

$$\begin{bmatrix} C\phi & S\phi & 0 \\ -S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} C\phi n_x + S\phi n_y & C\phi s_x + S\phi s_y & C\phi a_x + S\phi a_y \\ -S\phi n_x + C\phi n_y & -S\phi s_x + C\phi s_y - S\theta a_x + C\theta C\psi & -S\theta a_y - S\theta C\psi \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

Eguagliando gli elementi (1, 3) di entrambe le matrici della (2.3.8), abbiamo:

$$C\phi a_x + S\phi a_y = 0 \quad (2.3.9)$$

da cui:

$$\phi = \tan^{-1} \begin{bmatrix} a_x \\ -a_y \end{bmatrix} = \text{atan2}(a_x, -a_y) \quad (2.3.10)$$

Eguagliando gli elementi (1, 1) e (1, 2) delle due matrici, otteniamo:

$$C\psi = C\phi n_x + S\phi n_y \quad (2.3.11a)$$

$$S\psi = -C\phi s_x - S\phi s_y \quad (2.3.11b)$$

che portano alla soluzione per ψ ,

$$\begin{aligned} \psi &= \tan^{-1} \left[\frac{S\psi}{C\psi} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{-C\phi s_x - S\phi s_y}{C\phi n_x + S\phi n_y} \right] \\ &= \text{atan2}(-C\phi s_x - S\phi s_y, C\phi n_x + S\phi n_y) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Eguagliando gli elementi (2, 3) e (3, 3) di entrambe le matrici, abbiamo:

$$\begin{aligned} S\theta &= S\phi a_x - C\phi a_y \\ C\theta &= a_z \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

che ci fornisce la soluzione relativa a θ ,

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{S\theta}{C\theta} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{S\phi a_x - C\phi a_y}{a_z} \right] = \text{atan2}(S\phi a_x - C\phi a_y, a_z) \quad (2.3.14)$$

Dato che l'obiettivo della tecnica di trasformazione inversa è spostare un'incognita a sinistra nell'equazione matriciale e contemporaneamente risolvere in funzione dell'incognita, possiamo provare a risolvere l'equazione precedente per ϕ , θ , ψ *postmultiplicando* l'equazione matriciale vista prima per la sua trasformazione inversa $\mathbf{R}_{w,\psi}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & S\psi & 0 \\ -S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

Moltiplicando le matrici, otteniamo:

$$\begin{bmatrix} n_x C\psi - s_x S\psi & n_x S\psi + s_x C\psi & a_x \\ n_y C\psi - s_y S\psi & n_y S\psi + s_y C\psi & a_y \\ n_z C\psi - s_z S\psi & n_z S\psi + s_z C\psi & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi C\theta & S\phi S\theta \\ S\phi & C\phi C\theta & -C\phi S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

Ancora, eguagliando gli elementi (3, 1) di entrambe le matrici nell'equazione precedente abbiamo:

$$n_z C\psi - s_z S\psi = 0 \quad (2.3.16)$$

che dà:

$$\psi = \tan^{-1} \left[\frac{n_z}{s_z} \right] = \text{atan2}(n_z, s_z) \quad (2.3.17)$$

Eguagliando gli elementi (3, 2) e (3, 3) otteniamo:

$$S\theta = n_z S\psi + s_z C\psi \quad (2.3.18a)$$

$$C\theta = a_z \quad (2.3.18b)$$

che ci porta alla soluzione per θ ,

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{n_z S\psi + s_z C\psi}{a_z} \right] = \text{atan2}(n_z S\psi + s_z C\psi, a_z) \quad (2.3.19)$$

Eguagliando gli elementi (1, 1) e (2, 1) delle due matrici, abbiamo:

$$C\phi = n_x C\psi - s_x S\psi \quad (2.3.20a)$$

$$S\phi = n_y C\psi - s_y S\psi \quad (2.3.20b)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \left[\frac{n_y C\psi - s_y S\psi}{n_x C\psi - s_x S\psi} \right] \\ &= \text{atan2}(n_y C\psi - s_y S\psi, n_x C\psi - s_x S\psi) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Dipende dall'intuizione soggettiva capire quando occorre premoltiplicare o postmoltiplicare.

Applichiamo la tecnica della trasformazione inversa nella determinazione degli angoli di Eulero per un PUMA (soluzione OAT). Il robot PUMA utilizza i simboli O, A, T per indicare gli angoli di Eulero, e le loro definizioni sono le seguenti (riferendoci alla Figura 2.17):

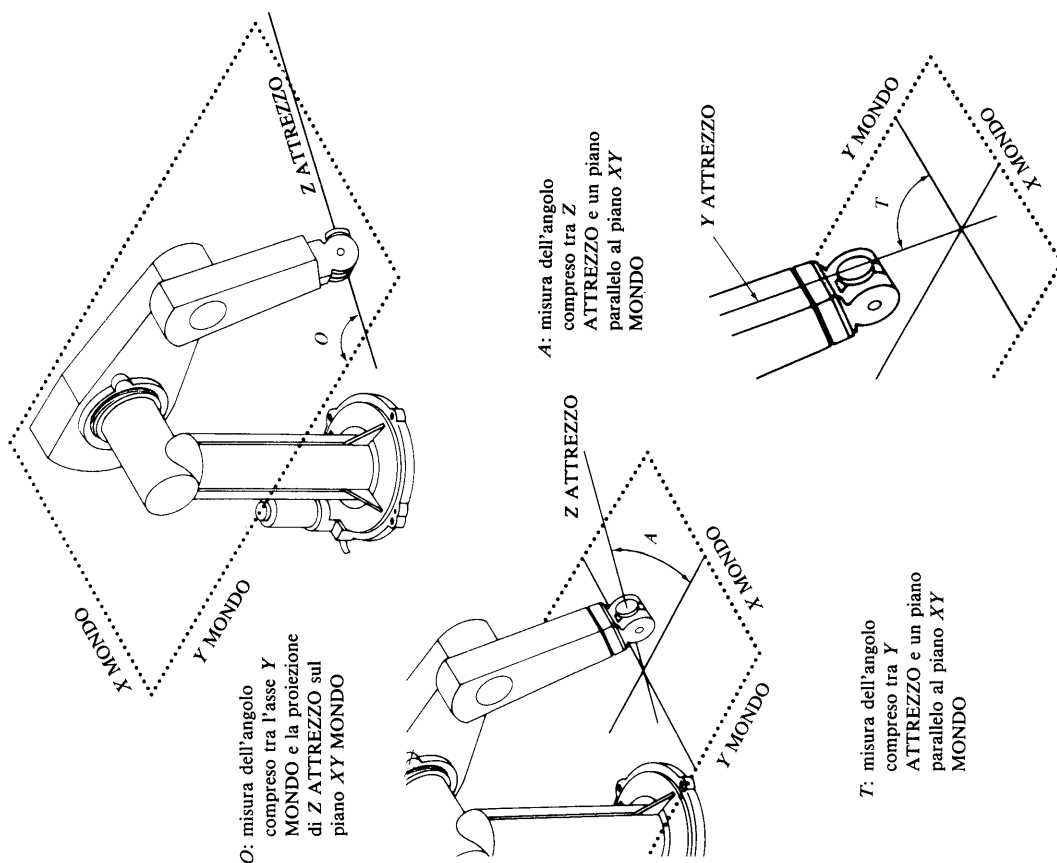


Figura 2.17 Definizione degli angoli di Eulero O, A, T. (Tratto dal manuale 398H del robot PUMA).

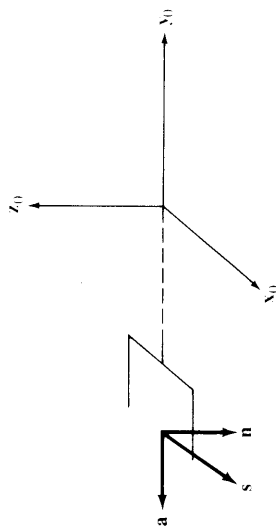


Figura 2.18 Allineamento iniziale del sistema di coordinate dell'attrezzo.

- O (orientamento) è l'angolo formato dall'asse y_0 con la proiezione dell'asse \mathbf{a} dell'attrezzo sul piano XY intorno all'asse z_0 .
- A (altitudine) è l'angolo che si può misurare dal piano XY fino all'asse \mathbf{a} dell'attrezzo intorno all'asse s dell'attrezzo stesso.
- T (attrezzo) è l'angolo formato dal piano XY e dall'asse s dell'attrezzo, intorno all'asse \mathbf{a} .

Inizialmente il sistema di coordinate dell'attrezzo (o sistema di coordinate della mano) è allineato con il sistema di coordinate fondamentale del robot come è evidenziato nella Figura 2.18. Cioè quando $O = A = T = 0^\circ$, la mano punta verso la parte negativa dell'asse y_0 con le dita su un piano orizzontale, e l'asse s è orientato nel senso positivo dell'asse x_0 . La trasformazione necessaria per descrivere l'orientamento del sistema di coordinate della mano $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a})$ rispetto al sistema di coordinate fondamentale (x_0, y_0, z_0) è data da:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.22}$$

Dalla definizione degli angoli OAT e della matrice di allineamento iniziale [Equazione (2.3.22)], la relazione tra la trasformazione della mano e gli angoli OAT è data da:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{z_0, O} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{s, A} \mathbf{R}_{a, T}$$

$$= \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & -ST & 0 \\ ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

postmultiplicando la matrice precedente per la trasformazione inversa di $\mathbf{R}_{a, T}$

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & ST & 0 \\ -ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix}$$

e moltiplicando le matrici abbiamo:

$$\begin{bmatrix} n_x CT - s_x ST & n_x ST + s_x CT & a_x \\ n_y CT - s_y ST & n_y ST + s_y CT & a_y \\ n_z CT - s_z ST & n_z ST + s_z CT & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -SOSA & CO & SOCA \\ COSA & SO & -COCA \\ -CA & 0 & -SA \end{bmatrix} \tag{2.3.23}$$

Eguagliando gli elementi (3, 2) dell'equazione matriciale precedente otteniamo:

$$n_z ST + s_z CT = 0 \tag{2.3.24}$$

che dà la soluzione di T:

$$T = \tan^{-1} \begin{bmatrix} s_z \\ -n_z \end{bmatrix} = \text{atan2}(s_z, -n_z) \quad (2.3.25)$$

Eguagliando gli elementi (3, 1) e (3, 3):

$$SA = -a_z \quad (2.3.26a)$$

e

$$CA = -n_z CT + s_z ST \quad (2.3.26b)$$

allora le precedenti equazioni danno:

$$A = \tan^{-1} \begin{bmatrix} -a_z \\ -n_z CT + s_z ST \end{bmatrix} = \text{atan2}(-a_z, -n_z CT + s_z ST) \quad (2.3.27)$$

Eguagliando gli elementi (1, 2) e (2, 2):

$$CO = n_x ST + s_x CT \quad (2.3.28a)$$

$$SO = n_y ST + s_y CT \quad (2.3.28b)$$

che forniscono la soluzione di O ,

$$O = \tan^{-1} \begin{bmatrix} n_y ST + s_y CT \\ n_x ST + s_x CT \end{bmatrix} \\ = \text{atan2}(n_y ST + s_y CT, n_x ST + s_x CT) \quad (2.3.29)$$

Le precedenti premoltiplicazioni e postmoltiplicazioni delle trasformazioni inverse delle incognite possono essere applicate anche per la soluzione dei giunti di un PUMA. Paul et al. [1981] forniscono ulteriori dettagli per la soluzione dei giunti del braccio di tale robot.

Anche se la tecnica della trasformazione inversa consente un approccio generale per determinare la soluzione dei giunti di un manipolatore, essa non ci dà un'indicazione chiara di come selezionare una soluzione adeguata fra le molte possibili per una particolare configurazione del braccio. Tale scelta deve basarsi sull'intuizione geometrica dell'operatore. Perciò per trovare una soluzione valida relativa agli angoli è più utile un approccio geometrico, data la matrice del braccio come dalla (2.2.39), e tale approccio consenta all'operatore di selezionare un'unica soluzione relativa a una determinata configurazione del braccio. Questo metodo verrà presentato nel Paragrafo 2.3.2.

2.3.2 L'APPROCCIO GEOMETRICO

Questo paragrafo mette in evidenza un approccio geometrico per la risoluzione del problema cinematico inverso in relazione ai manipolatori a sei link dotati di giunti rotazionali. Il discorso sarà incentrato su un manipolatore tipo PUMA.

Possono essere identificate varie configurazioni del braccio (Figura 2.11), basate sui sistemi di coordinate dei link e sulla geometria del braccio umano, con l'ausilio dei tre indicatori di configurazione ARM, ELBOW e WRIST (braccio, gomito e polso), due dei quali sono legati alla soluzione dei primi tre giunti e l'altro degli ultimi tre. Per un braccio a sei assi sono possibili quattro soluzioni per i primi tre giunti e, per ognuna di queste, ce ne sono due per gli ultimi tre giunti. Gli indicatori delle prime due configurazioni permettono di determinare una soluzione fra quattro possibili per i primi tre giunti. Similmente, il terzo indicatore seleziona una soluzione dalle due possibili per gli ultimi tre giunti. Gli indicatori del braccio sono pre-specificati dall'operatore per trovare la soluzione inversa. Quest'ultima viene calcolata in due stadi. Prima viene derivato un vettore posizione orientato dalla spalla al polso. Si utilizza questo procedimento per trovare la soluzione per i primi tre giunti i ($i = 1, 2, 3$) riferendosi alla proiezione del vettore posizione sul piano $x_{i-1} y_{i-1}$. La soluzione per gli ultimi tre giunti si ottiene attraverso il calcolo della soluzione del giunto dei primi tre, le sottomatrici di orientamento di 0T_i e ${}^{i-1}A_i$ ($i = 4, 5, 6$), e la proiezione dei sistemi di coordinate dei link sul piano $x_{i-1} y_{i-1}$. Dalla geometria si può facilmente trovare la soluzione valida per il braccio. Come verifica della soluzione dei giunti possono essere determinati gli indicatori della configurazione del braccio dalle corrispondenti equazioni decisionali che sono funzioni degli angoli del giunto. Con appropriate modifiche, questo approccio può essere generalizzato per la risoluzione del problema della cinematica inversa della maggior parte dei robot industriali di oggi con giunti rotazionali. Se ci viene data ${}^{\text{ref}}T_{\text{tool}}$, allora possiamo trovare 0T_6 , rispettivamente premoltiplicando e postmoltiplicando ${}^{\text{ref}}T_{\text{tool}}$ per \mathbf{B}^{-1} e \mathbf{H}^{-1} , e la soluzione degli angoli dei giunti può essere applicata a 0T_6 come si desidera.

$${}^0T_6 \equiv \mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} {}^{\text{ref}}T_{\text{tool}} \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.30)$$

Definizione delle varie configurazioni del braccio. Per il braccio del robot PUMA mostrato in Figura 2.11 (e per altri bracci articolati), sono definite

varie configurazioni in base alla geometria del braccio umano e ai sistemi di coordinate dei link che vengono stabiliti usando l'Algoritmo 2.1 come, (Figura 2.19):

- **Braccio destro:** θ_2 positivo muove il polso nel verso positivo di z_0 , mentre il giunto 3 non viene attivato.
- **Braccio sinistro:** θ_2 positivo sposta il polso nel verso negativo di z_0 ; anche qui il giunto 3 non viene attivato.
- **Braccio alzato (gomito più in alto del polso):** la posizione del polso del braccio destro/sinistro rispetto al sistema di coordinate della spalla ha valore positivo/negativo di coordinata lungo l'asse y_2 .

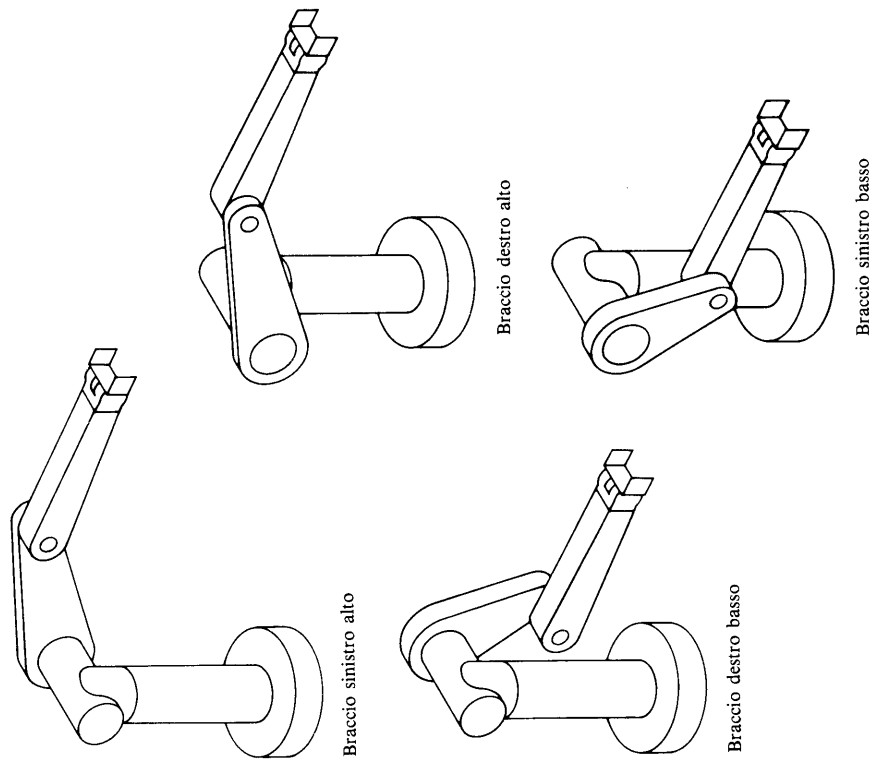


Figura 2.19 Definizione delle differenti configurazioni del braccio.

- **Braccio abbassato (gomito al di sotto del polso):** la posizione del polso del braccio destro/sinistro rispetto al sistema di coordinate della spalla ha valore positivo/negativo di coordinata lungo l'asse y_2 .
- **Polso diretto verso il basso:** il versore s del sistema di coordinate della mano e il versore y_5 del sistema di coordinate di coordinate (x_5, y_5, z_5) , hanno un prodotto scalare positivo.
- **Polso diretto verso l'alto:** il versore s del sistema di coordinate della mano e il versore y_5 del sistema di coordinate premenzionato hanno un prodotto scalare negativo.

(Si noti che la definizione delle configurazioni del braccio rispetto ai sistemi di coordinate dei link deve essere leggermente modificata se si usano differenti sistemi di coordinate dei link.)

In base alla definizione precedente sono definiti, per ogni configurazione, due *indicatori* (ARM ed ELBOW) per ogni configurazione del braccio. Questi due indicatori vengono combinati perché forniscano una soluzione fra le quattro possibili per i primi tre giunti. Per ognuna delle quattro configurazioni del braccio definite da questi indicatori (Figura 2.19), il terzo indicatore (WRIST) dà una delle due possibili soluzioni per gli ultimi tre giunti. Questi tre indicatori possono essere definiti così:

$$\text{ARM} = \begin{cases} +1 & \text{braccio destro} \\ -1 & \text{braccio sinistro} \end{cases} \quad (2.3.31)$$

$$\text{ELBOW} = \begin{cases} +1 & \text{braccio alzato} \\ -1 & \text{braccio abbassato} \end{cases} \quad (2.3.32)$$

$$\text{WRIST} = \begin{cases} +1 & \text{polso diretto verso il basso} \\ -1 & \text{polso diretto verso l'alto} \end{cases} \quad (2.3.33)$$

Oltre a questi indicatori, l'operatore può definire una variabile binaria FLIP come:

$$\text{FLIP} = \begin{cases} +1 & \text{Inverte l'orientamento del polso} \\ -1 & \text{Non inverte l'orientamento del polso} \end{cases} \quad (2.3.34)$$

I valori di questi indicatori e di FLIP sono prespecificati dall'operatore per trovare la soluzione cinematica inversa. Tali indicatori possono essere anche stabiliti dalla conoscenza degli angoli dei giunti usando le corrispon-

menti equazioni decisionali. Più avanti daremo le equazioni decisionali che determinano i valori di tali indicatori. Tali equazioni possono essere usate come verifica della soluzione cinematica inversa.

Soluzione per i primi tre giunti. Dal diagramma della cinematica del braccio in Figura 2.11 definiamo un vettore posizione \mathbf{p} orientato dall'origine del sistema di coordinate della spalla al punto in cui gli ultimi tre assi dei giunti si intersecano (vedi Figura 2.14):

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_6 - d_6 \mathbf{a} = (p_x, p_y, p_z)^T \quad (2.3.35)$$

Ciò corrisponde al vettore posizione di ${}^0\mathbf{T}_4$:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_4 S_{23}) - d_2 S_1 \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_4 S_{23}) + d_2 C_1 \\ d_4 C_{23} - a_3 S_{23} - a_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.36)$$

Soluzione del giunto 1. Se proiettiamo il vettore posizione \mathbf{p} sul piano $x_0 y_0$, come in Figura 2.20, otteniamo le seguenti equazioni per risolvere θ_1^L :

$$\theta_1^L = \phi - \alpha \quad \theta_1^R = \pi + \phi + \alpha \quad (2.3.37)$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (2.2.38)$$

$$\sin \phi = \frac{p_y}{R} \quad \cos \phi = \frac{p_x}{R} \quad (2.3.39)$$

$$\sin \alpha = \frac{d_2}{R} \quad \cos \alpha = \frac{r}{R} \quad (2.3.40)$$

dove gli esponenti L e R posti sopra gli angoli del giunto indicano rispettivamente le configurazioni sinistra e destra del braccio. Dalle equazioni da (2.3.37) a (2.3.40) otteniamo il seno e il coseno di θ_1 per le configurazioni sinistra e destra:

$$\sin \theta_1^L = \sin(\phi - \alpha) = \sin \phi \cos \alpha - \cos \phi \sin \alpha = \frac{p_y r - p_x d_2}{R^2} \quad (2.3.41)$$

$$\cos \theta_1^L = \cos(\phi - \alpha) = \cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha = \frac{p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad (2.3.42)$$

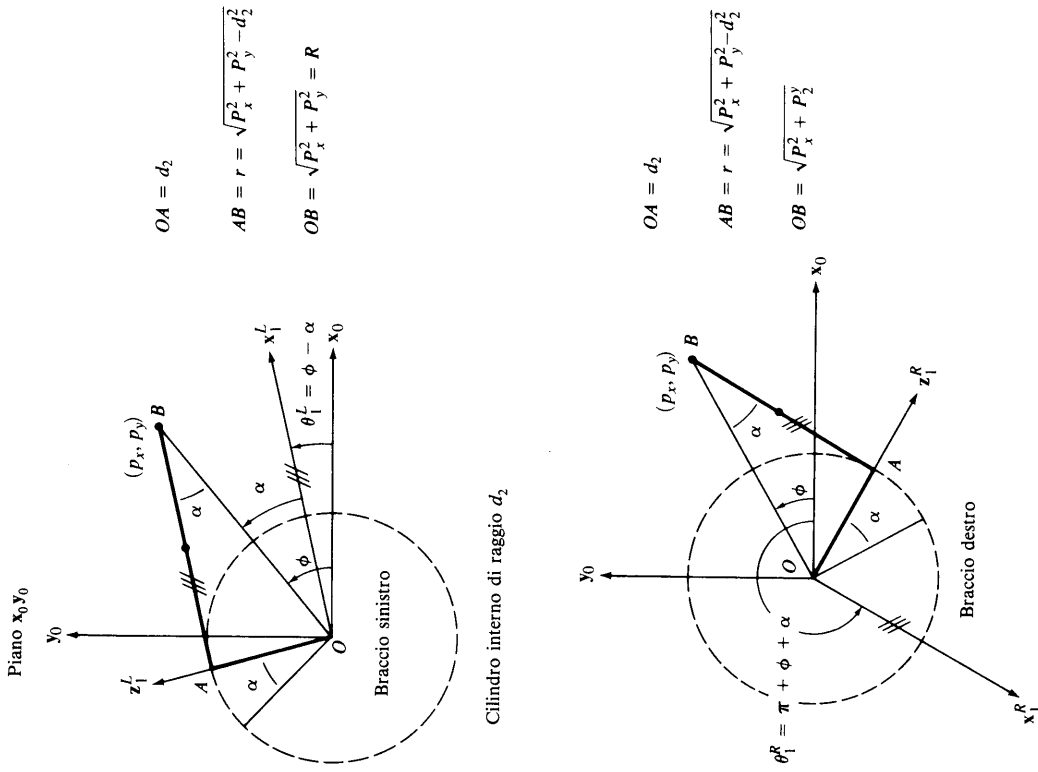


Figura 2.20 Soluzione per il giunto 1.

$$\sin \theta_1^R = \sin(\pi + \phi + \alpha) = \frac{-p_x r - p_y d_2}{R^2} \quad (2.3.43)$$

$$\cos \theta_1^R = \cos(\pi + \phi + \alpha) = \frac{-p_x r + p_y d_2}{R^2} \quad (2.3.44)$$

Combinando le equazioni da (2.3.41) a (2.3.44) e usando l'indicatore ARM per indicare la configurazione sinistra o destra del braccio, otteniamo seno e coseno di θ_1 , rispettivamente:

$$\sin \theta_1 = \frac{-\text{ARM} p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (2.3.45)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{-\text{ARM} p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2} \quad (2.3.46)$$

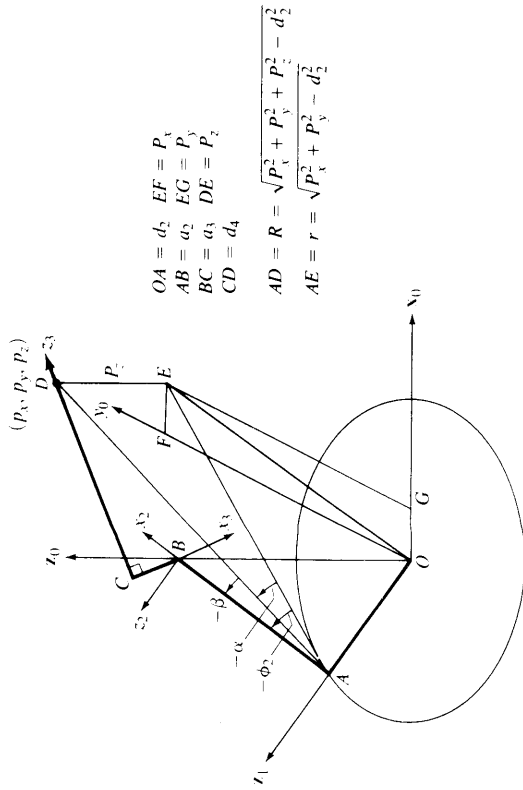
in cui si prende la radice quadrata positiva, e ARM è definito dalla (2.3.31). Per valutare θ_1 per $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$, useremo una funzione arcotangente come descritto nella (2.3.7). Dalle equazioni (2.3.45) e (2.3.46), e facendo uso della (2.3.7), θ_1 è:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{-\text{ARM} p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{-\text{ARM} p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2} \right] \quad -\pi \leq \theta_1 \leq \pi \quad (2.3.47)$$

Soluzione del giunto 2. Per trovare il giunto 2 proiettiamo il vettore posizione \mathbf{p} sul piano x_1, y_1 come è descritto nella Figura 2.21. In figura vediamo quattro differenti configurazioni del braccio; ciascuna di esse corrisponde a diversi valori per il giunto 2, come si può riscontrare nella Tabella 2.3 dove $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ e $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$.

Tabella 2.3 Le diverse configurazioni di braccio per il giunto 2.

Configurazioni del braccio	θ_2	ARM	ELBOW	ARM · ELBOW
Braccio sinistro alzato	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
Braccio sinistro abbassato	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
Braccio destro alzato	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
Braccio destro abbassato	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1



$$\begin{aligned} OA &= d_1 & EF &= p_x \\ AB &= d_2 & EG &= p_y \\ BC &= d_3 & DE &= p_z \\ CD &= d_4 \\ AD &= R & &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \\ AE &= r & &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \end{aligned}$$

Figura 2.21 Soluzione per il giunto 2.

Dalla precedente tabella, θ_2 può essere espresso in un'equazione che tiene presenti le diverse configurazioni del braccio e del gomito, utilizzando gli indicatori ARM ed ELBOW:

$$\theta_2 = \alpha + (\text{ARM} \cdot \text{ELBOW})\beta = \alpha + K \cdot \beta \quad (2.3.48)$$

dove l'indicatore della configurazione combinata del braccio K = ARM · ELBOW darà un appropriato valore assoluto, e il punto rappresenta una moltiplicazione degli indicatori. Dalla geometria del braccio di Figura 2.21 otteniamo:

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \quad (2.3.49)$$

$$\sin \alpha = \frac{p_z}{R} = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (2.3.50)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ARM} \cdot r}{R} = \frac{\text{ARM} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \quad (2.3.51)$$

$$\cos \beta = \frac{a_2^2 + R^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2 R} \quad (2.3.52)$$

$$= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - d_3^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \quad (2.3.53)$$

Dalle equazioni da (2.3.48) a (2.3.53), possiamo trovare seno e coseno di θ_2 :

$$\sin \theta_2 = \sin(\alpha + K \cdot \beta) = \sin \alpha \cos(K \cdot \beta) + \cos \alpha \sin(K \cdot \beta) \quad (2.3.54)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + (\text{ARM} \cdot \text{ELBOW}) \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \cos(\alpha + K \cdot \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - (\text{ARM} \cdot \text{ELBOW}) \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

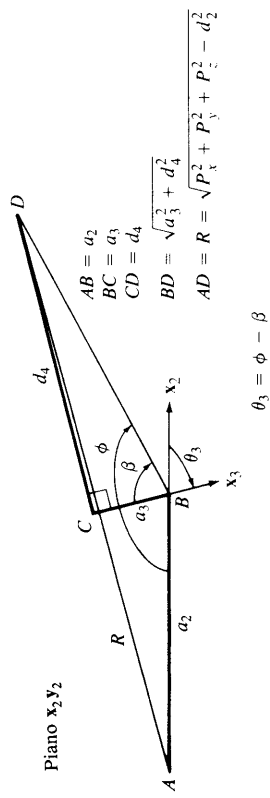
Dalle equazioni (2.3.54) e (2.3.55) otteniamo la soluzione per θ_2 :

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right] \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi \quad (2.3.56)$$

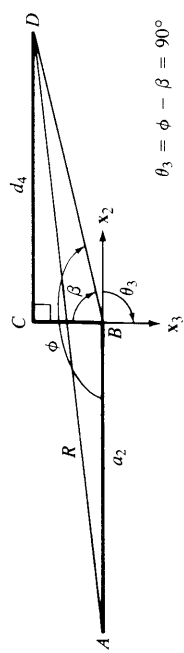
Soluzione del giunto 3. Per questo giunto proiettiamo il vettore posizione \mathbf{p} sul piano x_2, y_2 come mostrato in Figura 2.22. In figura sono nuovamente rappresentate quattro diverse configurazioni; ciascuna di esse corrisponde a differenti valori del giunto 3, come si può notare nella Tabella 2.4, dove $({}^2\mathbf{p}_4)_y$ è la componente y del vettore posizione dall'origine di (x_2, y_2, z_2) fino al punto in cui gli assi ultimi tre giunti si intersecano.

Tabella 2.4 Le diverse configurazioni di braccio per il giunto 3.

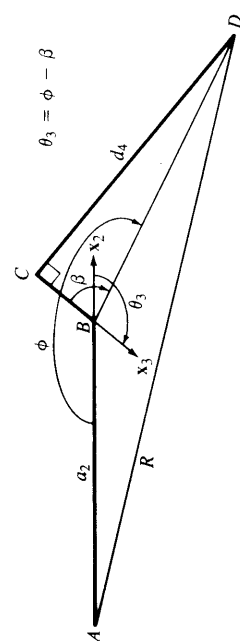
Configurazioni del braccio	$({}^2\mathbf{p}_4)_y$	θ_2	ARM	ELBOW	AR	ELBOW	AR	ELBOW
Braccio sinistro alzato	≥ 0	$\phi - \beta$	-1	+1	+1	-1	-1	-1
Braccio sinistro abbassato	≤ 0	$\phi - \beta$	-1	-1	-1	-1	+1	+1
Braccio destro alzato	≤ 0	$\phi - \beta$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
Braccio destro abbassato	≥ 0	$\phi - \beta$	+1	-1	-1	-1	-1	-1



Braccio sinistro abbassato



Braccio sinistro abbassato



Braccio sinistro alzato

Figura 2.22 Soluzione per il giunto 3.

Dalla geometria del braccio in Figura 2.22 otteniamo le seguenti equazioni per trovare la soluzione per θ_3 :

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad (2.3.57)$$

$$\cos \phi = \frac{a_2^2 + (d_4^2 + a_3^2) - R^2}{2a_2 \sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad (2.3.58)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \text{ARM} \cdot \text{ELBOW} \sqrt{1 - \cos^2 \phi} \\ \sin \beta &= \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \quad \cos \beta = \frac{|a_3|}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}} \end{aligned} \quad (2.3.59)$$

Dalla Tabella 2.4, possiamo esprimere θ_3 in un'equazione per le diverse posizioni del braccio.

$$\theta_3 = \phi - \beta \quad (2.3.60)$$

Dalla (2.3.60), le funzioni seno e coseno di θ_3 sono, rispettivamente:

$$\sin \theta_3 = \sin(\phi - \beta) = \sin \phi \cos \beta - \cos \phi \sin \beta \quad (2.3.61)$$

$$\cos \theta_3 = \cos(\phi - \beta) = \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta \quad (2.3.62)$$

Dalle equazioni (2.3.61) e (2.3.62), e usando le equazioni da (2.3.57) a (2.3.59), troviamo la soluzione per θ_3 :

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right] = -\pi \leq \theta_3 \leq \pi \quad (2.3.63)$$

Soluzione del braccio per gli ultimi tre giunti. Conoscendo i primi tre angoli di giunto, possiamo valutare la matrice ${}^0\mathbf{T}_3$ che è molto usata per trovare la soluzione degli ultimi tre giunti. Possiamo trovare la soluzione di questi per il PUMA imponendo per i giunti il rispetto dei seguenti criteri:

1. Stabilire il giunto 4 in modo che una rotazione intorno al giunto 5 allinei l'asse del giunto 6 col vettore avvicinamento (\mathbf{a} di \mathbf{T}).
2. Imporre che il giunto 5 allinei l'asse del giunto 6 con il vettore avvicinamento.
3. Fare in modo che il giunto 6 allinei il vettore di orientamento (o vettore di slittamento, \mathbf{y}_6) e il vettore normale.

Matematicamente i criteri precedenti significano, rispettivamente:

$$\mathbf{z}_4 = \frac{\pm (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} \quad \text{dato } \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T \quad (2.3.64)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_5 \quad \text{dato } \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T \quad (2.3.65)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{y}_6 \quad \text{dato } \mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T \quad \mathbf{e} \ \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \quad (2.3.66)$$

Nella (2.3.64), il prodotto vettoriale può essere considerato positivo o negativo. Come risultato, vi sono due soluzioni possibili per θ_4 . Se il prodotto è zero (cioè \mathbf{z}_3 parallelo ad \mathbf{a}), ciò indica il caso degenerare. Questo avviene quando gli assi di rotazione dei giunti 4 e 6 sono paralleli e indica che in questa particolare configurazione sarebbe sufficiente un braccio a 5 assi piuttosto che a 6.

Soluzione del giunto 4. Entrambi gli orientamenti del polso (UP e DOWN) vengono definiti osservando l'orientamento del sistema di coordinate della mano (\mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{a}) rispetto al sistema di coordinate (\mathbf{x}_5 , \mathbf{y}_5 , \mathbf{z}_5). Il segno del prodotto vettoriale nella (2.3.64) non può essere determinato senza tener conto dell'orientamento dei versori \mathbf{n} e \mathbf{s} rispetto ai versori \mathbf{x}_5 o \mathbf{y}_5 , rispettivamente, che sono in relazione fissa col vettore \mathbf{z}_4 per il modo in cui sono stati assegnati i sistemi di coordinate dei link. (In Figura 2.11 vediamo che il vettore \mathbf{z}_4 punta nella stessa direzione del vettore \mathbf{y}_5 .) Inizieremo dall'ipotesi che il prodotto vettoriale nella (2.3.64) sia positivo. Ciò può essere evidenziato da un indicatore di orientamento Ω definito da:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{se in caso degenerare} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 & \text{se } \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 \neq 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5 & \text{se } \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 = 0 \end{cases} \quad (2.3.67)$$

Dalla Figura 2.11 $\mathbf{y}_5 = \mathbf{z}_4$ e, servendoci della (2.3.64), possiamo riscrivere l'indicatore di orientamento Ω :

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{se in caso degenerare} \\ \mathbf{s} \cdot \frac{(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} & \text{se } \mathbf{s} \cdot (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}) \neq 0 \\ \mathbf{n} \cdot \frac{(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} & \text{se } \mathbf{s} \cdot (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}) = 0 \end{cases} \quad (2.3.68)$$

Se la nostra ipotesi sul segno del prodotto vettoriale nella (2.3.64) non si dimostrerà adeguata, verrà corretta in seguito usando la combinazione degli indicatori WRIST e Ω . L' Ω è usata per indicare l'orientamento iniziale del vettore \mathbf{z}_4 (verso positivo) dall'assegnamento del sistema di coordinate dei link, mentre WRIST specifica la preferenza da parte dell'operatore per l'orientamento del sottosistema del polso secondo la definizione data nella (2.3.33). Se gli indicatori Ω e WRIST hanno lo stesso segno, l'ipotesi riguardo al segno del prodotto vettoriale della (2.3.64) è corretta. Nella Tabella 2.5 sono riportati i diversi orientamenti del polso risultanti dalla combinazione dei differenti valori degli indicatori WRIST e Ω .

Tabella 2.5 I diversi orientamenti del polso.

Orientamenti del polso	$\Omega = s \cdot y_5$	$o \cdot n \cdot y_5$	WRIST	$M = \text{WRIST}$	segno (Ω)
Verso il basso	≥ 0		+1		+1
Verso il basso	< 0		+1		-1
Verso l'alto	≥ 0		-1		-1
Verso l'alto	< 0		-1		+1

Osservando la proiezione del sistema di coordinate (x_4, y_4, z_4) sul piano $x_3 y_3$ e dalla Tabella 2.5, nonché dalla Figura 2.23, si può dimostrare che i seguenti risultati sono veri:

$$\sin \theta_4 = -M(z_4 \cdot x_3) \quad \cos \theta_4 = M(z_4 \cdot y_3) \quad (2.3.69)$$

dove x_3 e y_3 sono rispettivamente i vettori colonna x e y di 0T_3 , $M = \text{WRIST} \cdot \text{segno}(\Omega)$, e la funzione segno è così definita:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (2.3.70)$$

In tal modo, la soluzione per θ_4 con gli indicatori di orientamento e WRIST è:

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_4}{\cos \theta_4} \right] \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{M(C_1 a_y - S_1 a_x)}{M(C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_z)} \right] - \pi \leq \theta_4 \leq \pi \quad (2.3.71) \end{aligned}$$

Se ci si imbatte nel caso degenerare, può essere scelto il valore più conveniente per θ_4 purché sia rispettato l'orientamento del polso (UP/DOWN). Ciò può essere sempre assicurato stabilendo θ_4 uguale al valore corrente di θ_4 . Oltre a questo, l'operatore può complementare FLIP per ottenere l'altra soluzione di θ_4 , cioè, $\theta_4 = \theta_4 + 180^\circ$.

Soluzione per il giunto 5. Per trovare θ_5 , usiamo il criterio di allineare l'asse di rotazione del giunto 6 al vettore avvicinamento ($o \cdot a = z_5$). Facendo riferimento alla proiezione del sistema di coordinate (x_5, y_5, z_5) sul

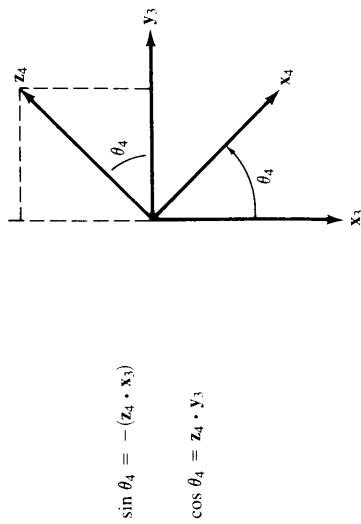


Figura 2.23 Soluzione per il giunto 4.

piano $x_4 y_4$, si può dimostrare che valgono le formule seguenti (vedi Figura 2.24):

$$\sin \theta_5 = a \cdot x_4 \quad \cos \theta_5 = -(a \cdot y_4) \quad (2.3.72)$$

dove x_4 e y_4 sono rispettivamente i vettori colonna x e y di 0T_4 , e a è il vettore avvicinamento. Così, la soluzione per θ_5 è:

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_5}{\cos \theta_5} \right] - \pi \leq \theta_5 \leq \pi \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right] \quad (2.3.73) \end{aligned}$$

Se $\theta_5 \approx 0$, si ricade nel caso degenerare.

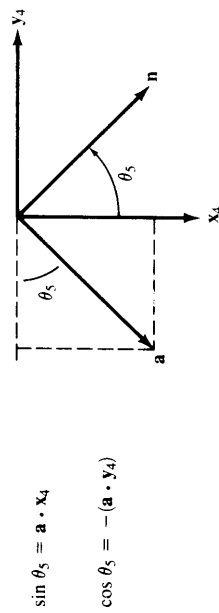


Figura 2.24 Soluzione per il giunto 5.

Soluzione del giunto 6. Fino a ora abbiamo allineato l'asse del giunto 6 al vettore avvicinamento. Ora abbiamo bisogno di allineare l'orientamento della pinza perché afferrì facilmente un oggetto. Il criterio che consente di farlo è stabilire $s = y_6$. Facendo riferimento alla proiezione del sistema di coordinate della mano $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a})$ sul piano x_5, y_5 , si può dimostrare che valgono le seguenti espressioni (vedi Figura 2.25):

$$\sin \theta_6 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5 \quad \cos \theta_6 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 \quad (2.3.74)$$

dove y_5 è il vettore colonna y di 0T_5 e \mathbf{n} e \mathbf{s} sono rispettivamente il vettore normale e quello di slittamento di 0T_6 . Così, la soluzione per θ_6 è:

$$\theta_6 = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_6}{\cos \theta_6} \right] \quad -\pi \leq \theta_6 \leq \pi$$

$$= \tan^{-1} \left[\frac{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y + (S_4 S_{23}) n_z}{(-S_1 C_4 - C_1 C_{23} S_4) s_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) s_y + (S_4 S_{23}) s_z} \right] \quad (2.3.75)$$

La precedente derivazione della soluzione cinematica inversa del braccio di un robot PUMA è basata sull'interpretazione geometrica della posizione dell'estremità del link 3 e dell'orientamento richiesto per la mano (o pinza). Nella precedente derivazione di θ_4, θ_5 e θ_6 c'è un punto debole: il criterio per rendere l'asse di movimento del giunto 5 uguale al prodotto vettoriale di \mathbf{z}_3 e \mathbf{a} può non essere valido quando $\sin \theta_5 = 0$, cioè quando $\theta_5 = 0$. In questo caso, il manipolatore diventa *degenerare* con entrambi gli assi di mo-

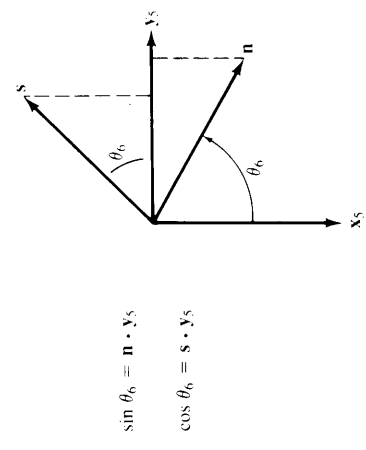


Figura 2.25 Soluzione per il giunto 6.

vimento dei giunti 4 e 6 allineati. In questa condizione, solo la somma di θ_4 e θ_6 è significativa. Nel caso degenerare siamo liberi di scegliere un qualunque valore per θ_4 e di solito si usa il suo valore corrente; quindi vogliamo avere $\theta_4 + \theta_6$ uguale all'angolo totale richiesto per allineare il vettore di slittamento \mathbf{s} e il vettore normale \mathbf{n} . Se FLIP è a 1, allora $\theta_4 = \theta_4 + \pi$, $\theta_5 = -\theta_5$, e $\theta_6 = \theta_6 + \pi$.

Ricapitolando, vi sono otto soluzioni per il problema della cinematica inversa di un braccio tipo PUMA. La soluzione dei primi tre giunti $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, posiziona il braccio mentre quella degli ultimi tre $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$, consente l'orientamento corretto della mano. Vi sono quattro soluzioni per i primi tre giunti, due per la configurazione della spalla destra e due per la spalla sinistra. Per ciascuna configurazione del braccio, le equazioni (2.3.47), (2.3.56), (2.3.63), (2.3.71), (2.3.73) e (2.3.75) danno un insieme di soluzioni $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$ mentre $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 + \pi, -\theta_5, \theta_6 + \pi)$ (con FLIP a 1), danno un altro insieme di soluzioni.

Equazioni decisionali per gli indicatori della configurazione del braccio. La soluzione per il braccio tipo PUMA ottenuta nel paragrafo precedente non è unica e dipende dagli indicatori specificati dall'operatore. Questi indicatori (ARM, ELBOW e WRIST) possono essere determinati anche dagli angoli del giunto. In questo paragrafo deriveremo le rispettive equazioni decisionali per ogni indicatore della configurazione del braccio. Il segno dell'equazione decisionale (positivo, zero o negativo) fornisce un'indicazione per le configurazioni del braccio come è definito nelle equazioni da (2.3.31) a (2.3.33). Per l'indicatore ARM, seguendo la definizione dei bracci RIGHT/LEFT, si può trovare che un'equazione decisionale è:

$$g(\theta, \mathbf{p}) = \mathbf{z}_0 \cdot \frac{\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} = \mathbf{z}_0 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|}$$

$$= \frac{-p_y \sin \theta_1 - p_x \cos \theta_1}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} \quad (2.3.76)$$

Dove $\mathbf{p}' = (p_x, p_y, 0)^T$ è la proiezione del vettore posizione \mathbf{p} [Equazione (2.3.36)] sul piano x_0, y_0 , $\mathbf{z}_1 = (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0)^T$ dal terzo vettore colonna di 0T_1 , e $\mathbf{z}_0 = (0, 0, 1)^T$. Abbiamo le seguenti possibilità:

1. Se $g(\theta, \mathbf{p}) > 0$, allora il braccio è nella configurazione RIGHT.
2. Se $g(\theta, \mathbf{p}) < 0$, il braccio è nella configurazione LEFT.

3. Se $g(\theta, \mathbf{p}) = 0$, il criterio per trovare la configurazione LEFT/RIGHT non può essere determinato in modo univoco. Il braccio è all'interno del cilindro di raggio d_2 nello spazio di lavoro (vedi Figura 2.19). In questo caso si sceglie arbitrariamente il braccio RIGHT (ARM = +1).

Dal momento che il denominatore dell'equazione decisionale precedente è sempre positivo, la determinazione della configurazione LEFT/RIGHT si riduce alla scelta del segno del numeratore di $g(\theta, \mathbf{p})$:

$$\text{ARM} = \text{segno} [g(\theta, \mathbf{p})] = \text{segno} (-p_x \cos \theta_1 - p_y \sin \theta_1) \quad (2.3.77)$$

dove la funzione segno è definita nella (2.3.70). Sostituendo le componenti x e y di \mathbf{p} dalla (2.3.36), la (2.3.77) diventa:

$$\text{ARM} = \text{segno} [g(\theta, \mathbf{p})] = \text{segno} (-d_4 S_{23} - a_3 C_{23} - a_2 C_2) \quad (2.3.78)$$

Dunque, dall'equazione decisionale nella (2.3.78) si può mettere in relazione il suo valore con segno con ARM per la configurazione LEFT/RIGHT:

$$\text{ARM} = \text{segno} (-d_4 S_{23} - a_3 C_{23} - a_2 C_2) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{braccio destro} \\ -1 \Rightarrow \text{braccio sinistro} \end{cases} \quad (2.3.79)$$

Per l'indicatore ELBOW, seguiamo la definizione ABOVE/BELOW (posizione superiore/inferiore) per formulare l'equazione decisionale corrispondente. Usando $({}^2\mathbf{p}_4)_x$ e ARM nella Tabella 2.4, l'equazione decisionale per l'indicatore ELBOW è basata sul segno della componente y del vettore posizione di ${}^2\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4$ e di ARM:

$$\text{ELBOW} = \text{ARM} \cdot \text{segno} (d_4 C_3 - a_3 S_3) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{gomito in alto} \\ -1 \Rightarrow \text{gomito in basso} \end{cases} \quad (2.3.80)$$

Per WRIST seguiamo la definizione DOWN/UP del polso allo scopo di ottenere un prodotto scalare positivo dei versori s e y : ($0 \mathbf{z}_4$):

$$\text{WRIST} = \begin{cases} +1 & \text{se } s \cdot \mathbf{z}_4 > 0 \\ -1 & \text{se } s \cdot \mathbf{z}_4 < 0 \end{cases} = \text{segno} (s \cdot \mathbf{z}_4) \quad (2.3.81)$$

Se $s \cdot \mathbf{z}_4 = 0$, allora WRIST può essere trovato con:

$$\text{WRIST} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4 > 0 \\ -1 & \text{se } \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4 < 0 \end{cases} = \text{segno} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4) \quad (2.3.82)$$

Combinando le equazioni (2.3.81) e (2.3.82), abbiamo:

$$\text{WRIST} = \begin{cases} \text{segno} (s \cdot \mathbf{z}_4) & \text{se } s \cdot \mathbf{z}_4 \neq 0 \\ \text{segno} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_4) & \text{se } s \cdot \mathbf{z}_4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{polso diretto verso il basso} \\ -1 \Rightarrow \text{polso diretto verso l'alto} \end{cases} \quad (2.3.83)$$

Queste equazioni decisionali conducono a una verifica della soluzione del braccio. Le useremo per prestabilire la sua configurazione nella cinematica diretta e utilizzeremo poi gli indicatori per trovare la soluzione cinematica inversa (vedi Figura 2.26).

Simulazione al calcolatore. Si può scrivere un programma per calcolatore allo scopo di verificare la validità della soluzione inversa per il PUMA mostrato in Figura 2.11. Il software genera inizialmente tutte le posizioni nell'ambito di lavoro del robot entro i limiti degli angoli dei giunti. Esse sono inserite nella routine della cinematica inversa per ottenere la matrice \mathbf{T} . Gli angoli dei giunti sono usati anche per calcolare le equazioni decisionali per ottenere i tre indicatori della configurazione del braccio. Gli indicatori vengono forniti, insieme alla matrice \mathbf{T} del braccio, alla routine per la soluzione inversa per ottenere la soluzione degli angoli dei giunti; gli angoli così trovati dovrebbero accordarsi con gli angoli forniti in precedenza alla routine per la soluzione cinematica diretta. Un diagramma a blocchi per la simulazione si trova nella Figura 2.26.

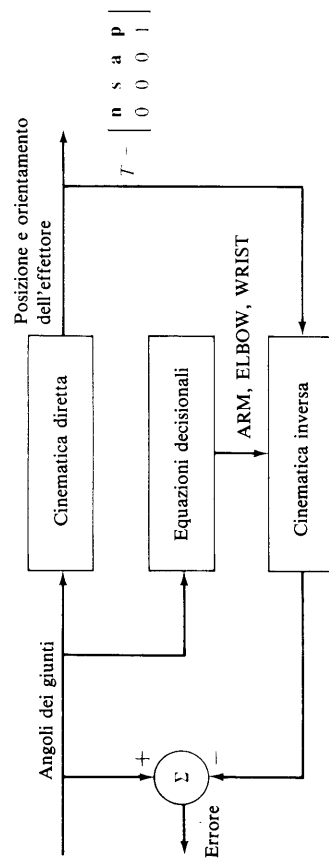


Figura 2.26 Simulazione al calcolatore della soluzione per i giunti.

2.4 CONCLUSIONI

In questo capitolo abbiamo trattato sia la cinematica diretta sia l'inversa. Sono stati definiti i parametri dei link e dei giunti ed è stata introdotta una matrice di trasformazione omogenea 4×4 per descrivere la posizione di un link rispetto a un sistema di coordinate fisso. Sono state poi ottenute le equazioni cinematiche dirette per il braccio di un robot tipo PUMA a sei assi.

È stato presentato il problema della cinematica inversa e ci si è avvalsi della trasformazione inversa per determinare la soluzione degli angoli di Eulero. Questa tecnica può essere usata anche per trovare la soluzione inversa di robot semplici. Comunque, ciò non fornisce una visione geometrica del problema. Così, è stato proposto un approccio geometrico per trovare la soluzione inversa per un braccio a sei giunti con giunti rotazionali. La soluzione inversa è determinata con l'aiuto di tre indicatori di configurazione del braccio (ARM, ELBOW e WRIST). Le soluzioni per un PUMA sono otto, quattro per i primi tre giunti e per ogni configurazione, due ulteriori soluzioni per gli ultimi tre giunti. La validità della soluzione cinematica diretta e inversa può essere verificata tramite simulazione al calcolatore. L'approccio geometrico, con appropriate modifiche, può essere esteso ad altri semplici robot industriali con giunti rotazionali. I concetti cinematici esposti in questo capitolo saranno usati frequentemente nel Capitolo 3 per derivare le equazioni di moto che descrivono il comportamento dinamico di un braccio.

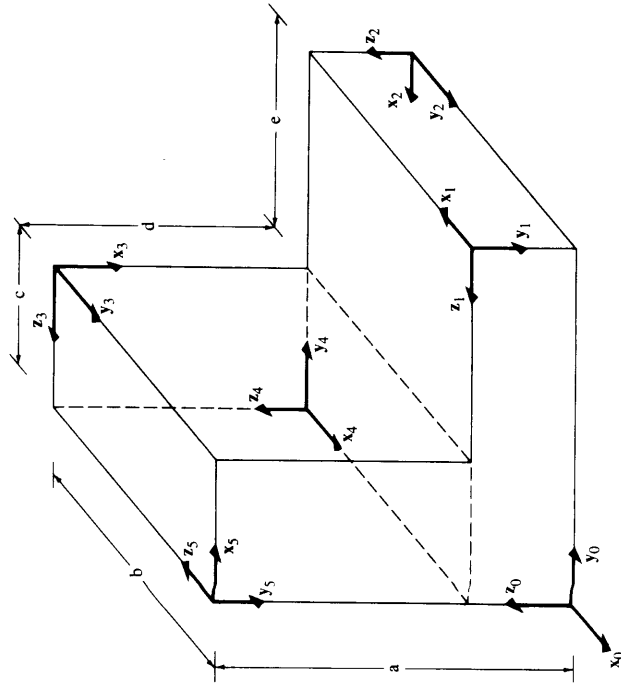
BIBLIOGRAFIA

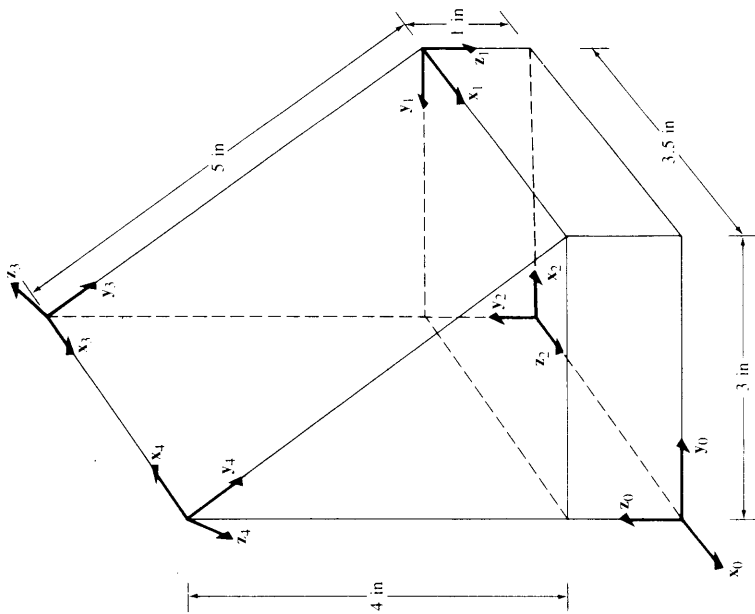
Ulteriori approfondimenti sulle matrici si possono trovare in Bellman [1970], Frazer et al. [1960] e Gantmacher [1959]. L'uso di matrici per descrivere la posizione di un link meccanico rigido è reperibile nell'articolo di Denavit e Hartenberg [1955] e nel loro libro (Hartenberg e Denavit [1964]). Altre letture relative alle coordinate omogenee si trovano in Duda e Hart [1973] e Newman e Sproull [1979]. La trattazione sulla cinematica è un ampliamento di un articolo di Lee [1982]. Un più ampio discorso sulla cinematica può essere reperito in Hartenberg e Denavit [1964] e Suh e Radcliffe [1978]. Nonostante le rappresentazioni matriciali delle articolazioni implicino un approccio sistematico per risolvere il problema cinematico diretto, l'approccio vettoriale al problema della cinematica mostra una rappresentazione più concisa delle articolazioni. Ciò è stato trattato in un articolo di Chase [1963]. Altri libri sulla robotica che trattano il problema della cinematica sono Paul [1981], Lee, Gonzalez e Fu [1986] e Snyder [1985].

Pieper [1968] nella sua tesi di dottorato fa uso di un approccio algebrico nella risoluzione del problema della cinematica inversa. L'esposizione della tecnica della trasformazione inversa per trovare la soluzione del braccio è basata sull'articolo di Paul et al. [1981]. L'approccio geometrico per risolvere il problema cinematico inverso per un manipolatore a sei link con giunti rotazionali ha come base l'articolo di Lee e Ziegler [1984]. La soluzione del braccio di un robot Stanford si trova in un rapporto di Lewis [1974]. Altre tecniche di risoluzione della cinematica inversa vengono presentate negli articoli di Denavit [1956], Kohli e Soni [1975], Yang e Freudenstein [1964], Yang [1969], Yuan e Freudenstein [1971], Duffy e Rooney [1975], Uicker et al. [1964]. Infine, il libro introduttivo coordinato da Lee, Gonzalez, Fu [1986] contiene numerosi recenti articoli sulla robotica.

ESERCIZI

1. Qual è la matrice rotazionale per una rotazione di 30° intorno all'asse z , seguita da una rotazione di 60° intorno all'asse x , e quindi da una rotazione di 90° intorno all'asse y ?



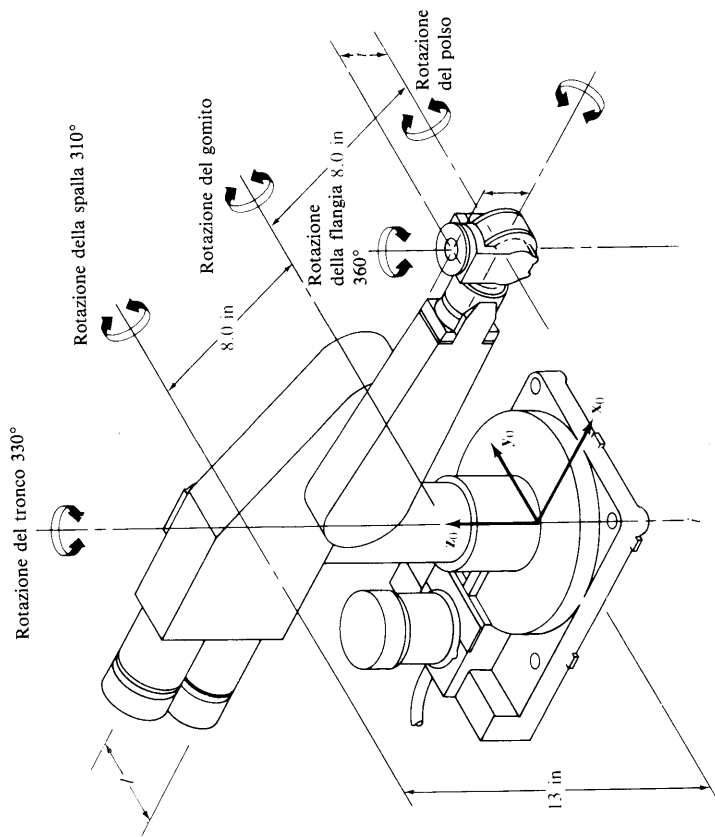


2. Qual è la matrice rotazionale per una rotazione di angolo ϕ intorno all'asse x , seguita da una rotazione di angolo ψ intorno all'asse w , seguita da una rotazione di angolo θ intorno all'asse y ?
3. Trovare un'altra sequenza di rotazioni che sia differente da quella dell'Esercizio 2, ma che dia come risultato la stessa matrice di rotazione.
4. Derivare la formula per $\sin(\phi + \theta)$ e $\cos(\phi + \theta)$ espandendo simbolicamente due rotazioni di ϕ e θ utilizzando i concetti di matrice rotazionale esposti in questo capitolo.
5. Determinare una matrice T che rappresenti una rotazione di angolo α intorno all'asse x , seguita da una traslazione di b unità di lunghezza lungo l'asse z , e quindi da una rotazione di angolo ϕ intorno all'asse y .
6. Per la figura seguente trovare le matrici di trasformazione omogenea 4×4 ${}^{i-1}A_i$ e 0A_i per $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

7. Per la figura della pagina precedente, trovare le matrici di trasformazione omogenea 4×4 ${}^{i-1}A_i$ e 0A_i per $i = 1, 2, 3, 4$.
8. Una stazione di lavoro robotizzata è dotata di una telecamera come illustrato nell'esempio del Paragrafo 2.2.11. La telecamera inquadra l'origine del sistema di coordinate fondamentale dove è ancorato un robot a sei link, e anche il centro di un cubo che deve essere manipolato dal robot. Se al centro del cubo è stato stabilito un sistema di coordinate locale, allora questo oggetto, visto dalla telecamera, può essere rappresentato da una matrice di trasformazione omogenea T_1 . Inoltre, l'origine del sistema di coordinate fondamentale come lo si vede dall'obiettivo può essere espressa da una matrice T_2 , dove:

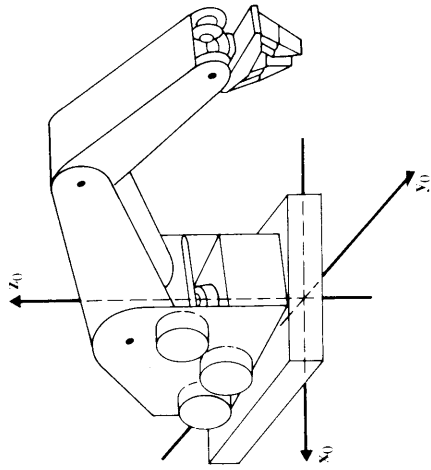
$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Sfortunatamente, dopo che è stato piazzato l'equipaggiamento e sono stati presi questi sistemi di coordinate, qualcuno ha ruotato la telecamera di 90° intorno all'asse z della stessa. Qual è la posizione e l'orientamento della telecamera rispetto al sistema di coordinate fondamentale del robot?
- (b) Dopo aver risposto alla domanda (a), supponete che la stessa persona ruoti l'oggetto di 90° intorno all'asse x dello stesso e lo trasi di quattro unità di lunghezza lungo l'asse y ruotato. Qual è la posizione/orientamento dell'oggetto rispetto al sistema di coordinate fondamentale del robot? E rispetto al sistema di coordinate ruotato della telecamera?
9. Abbiamo trattato un approccio geometrico per trovare la soluzione cinematica inversa per un braccio PUMA. Si trovino ora i requisiti di calcolo della soluzione dei giunti in termini di operazioni di moltiplicazione e addizione e anche il numero delle chiamate di funzioni trascendenti (se lo stesso termine appare due volte la sua valutazione sarà contata una sola volta).
10. Stabilire i sistemi di coordinate ortonormali del link (x_i, y_i, z_i) per $i = 1, 2, \dots, 6$ per il braccio del PUMA 260 mostrato nella figura della pagina seguente e completare la tabella.
11. Stabilire i sistemi di coordinate ortonormali del link (x_i, y_i, z_i) per $i = 1, 2, \dots, 5$ per il braccio del robot MINIMOVER che si vede nella figura di pag. 113 in alto e completare la tabella.
12. Un braccio Stanford si è posizionato come mostrato nella figura di pag. 113 in basso. Le variabili dei giunti in questa posizione sono $q = (90^\circ, -120^\circ, 22 \text{ cm}, 0^\circ, 70^\circ, 90^\circ)^T$. Stabilire il sistema di coordinate ortonormali dei link (x_i, y_i, z_i) per $i = 1, 2, \dots, 6$ per questo braccio e completare la tabella.
13. Utilizzando le sei matrici ${}^{i-1}A_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) del braccio del robot in Figura 2.13, trovare il suo errore di posizione all'estremità del link 3 dovuto all'errore di misura dei primi tre angoli del giunto $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$. È sufficiente una soluzione per approssimazione del primo ordine.



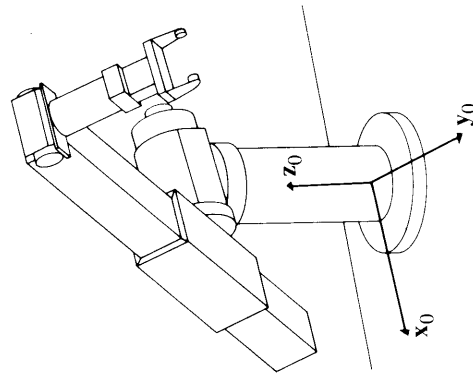
Parametri delle coordinate dei link del braccio PUMA

Giunto i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				



Parametri delle coordinate dei link del braccio MINIMOVER

Giunto i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1				
2				
3				
4				
5				



Parametri delle coordinate dei link del braccio Stanford

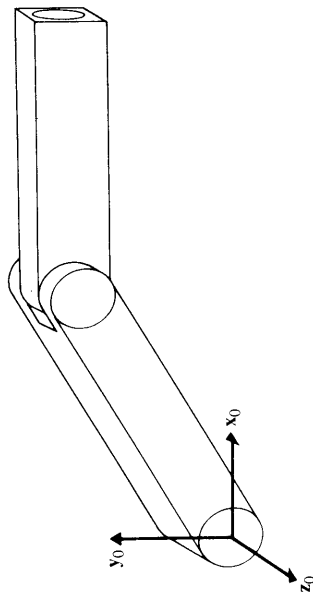
Giunto i	θ_i	α_i	a_i	d_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

14. Ripetere l'Esercizio 13 per il braccio Stanford mostrato nella Figura 2.12.

15. Nella figura della pagina seguente è mostrato un manipolatore con due gradi di libertà. Dato che ogni link è lungo 1m, stabilire i sistemi di coordinate dei link e trovare 0A_1 e 1A_2 . Trovare la soluzione cinematica inversa per questo manipolatore.

16. Per il braccio di un robot PUMA illustrato nella Figura 2.11, supponete di aver trovato la soluzione corretta per i primi tre giunti ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) e che siano note ${}^{i-1}A_i, i = 1, 2, \dots, 6$ e 6T_6 . Utilizzate la tecnica della trasformazione inversa per trovare la

soluzione per gli ultimi tre angoli di giunto (θ_4 , θ_5 , θ_6). Confrontate la vostra soluzione con quella ottenuta dalle equazioni (2.3.71), (2.3.73) e (2.3.75).



17. Per il braccio Stanford che possiamo osservare nella Figura 2.12, derivare la soluzione degli angoli dei primi tre giunti. È consentito l'uso di qualsiasi metodo ritenuto adeguato.

18. Ripetere l'Esercizio 16 per lo Stanford Arm della Figura 2.12.

3

Dinamica del braccio

L'ineluttabile arriva
per superare lo sforzo.
Oliver Wendell Holmes

3.1 INTRODUZIONE

La dinamica del braccio di un robot tratta le formulazioni matematiche delle equazioni del moto del braccio. Le equazioni dinamiche del moto di un manipolatore costituiscono un sistema di equazioni matematiche che ne descrivono il comportamento dinamico. Tali equazioni sono utili per la simulazione al calcolatore del movimento del braccio, per formulare le equazioni per il controllo del braccio e per valutare il progetto cinematico e la struttura del braccio. Questo capitolo sarà incentrato sulla formulazione, le caratteristiche e le proprietà delle equazioni dinamiche del moto utilizzabili per il controllo. Lo scopo del controllo di un manipolatore guidato da calcolatore è far sì che la sua risposta dinamica soddisfi le prestazioni ipotizzate in fase di progetto. In generale, le prestazioni dinamiche di un manipolatore dipendono direttamente dall'efficienza dell'algoritmo di controllo e del modello dinamico del manipolatore. Il problema del controllo consiste nell'ottenere modelli dinamici del sistema fisico del braccio e poi specificare le corrispondenti leggi o strategie di controllo per raggiungere la risposta e le prestazioni desiderate. Questo capitolo si occupa principalmente della prima parte del problema del controllo del manipolatore: modellare e valutare le proprietà dinamiche e il comportamento dei robot controllati tramite calcolatore.

Il modello dinamico di un braccio si ottiene da note leggi fisiche, quali le leggi della meccanica di Newton e quelle di Lagrange. Questo conduce allo sviluppo delle equazioni dinamiche del movimento per i vari giunti articolati del manipolatore in relazione ai parametri geometrici e inerziali specifici dei link. Per sviluppare le effettive equazioni del movimento del braccio potrebbero essere allora applicati sistematicamente approcci convenzionali