

# 4

## Calcolo delle traiettorie dei manipolatori

Un vero labirinto!  
ma non privo di un piano.

*Alexander Pope*

### 4.1 INTRODUZIONE

Rammentando la trattazione della cinematica e della dinamica di un manipolatore esposta nei capitoli precedenti, ci dedichiamo ora al problema del controllo del manipolatore perché segua un percorso prestabilito. Prima di muovere il braccio di un robot, è necessario sapere se ci sono ostacoli sul suo cammino (vincolo degli ostacoli) e se la mano del manipolatore deve percorrere un cammino specifico (vincolo del percorso). Questi due vincoli combinati danno luogo a quattro possibili modalità di controllo, come è espresso nella Tabella 4.1. Da questa tabella, si può notare che il problema del controllo di un manipolatore può essere convenientemente ripartito in due coerenti sottoproblemi: pianificazione del movimento (o della traiet-

Tabella 4.1 Modalità per il controllo di un manipolatore.

|                      |   | Vincolo dell'ostacolo |  |
|----------------------|---|-----------------------|--|
|                      |   | Si                    | No   |
| Vincolo del percorso | Pianificazione fuori linea del percorso esente da collisioni e inseguimento in linea del percorso |                       | Pianificazione fuori linea del percorso e inseguimento in linea del percorso |
|                      | Controllo della posizione e ricerca e aggiornamento in linea degli ostacoli                       | No                    | Controllo della posizione  |



ria) e controllo del movimento. Questo capitolo focalizza la sua attenzione su diversi schemi di pianificazione della traiettoria per il movimento in uno spazio libero da ostacoli. Inoltre, tratta il formalismo della descrizione del movimento del manipolatore espresso come una sequenza di punti nello spazio (posizione e orientamento del manipolatore), attraverso le quali il manipolatore deve passare, e anche la curva spaziale che esso percorre. La curva spaziale lungo la quale la mano del manipolatore si muove dallo stato iniziale (posizione e orientamento) allo stato finale è chiamata *percorso*. Siamo interessati allo sviluppo di formalismi utilizzabili per definire e descrivere il movimento desiderato della mano tra le estremità del percorso. I metodi di pianificazione della traiettoria generalmente "interpolano" o "approssimano" il percorso desiderato grazie a una classe di funzioni polinomiali e creano una sequenza di "punti temporali prestabiliti" per il controllo del manipolatore dallo stato iniziale fino alla sua destinazione. Le estremità del percorso possono essere specificate sia nelle coordinate dei giunti, sia in coordinate cartesiane. Comunque, sono solitamente espresse in coordinate cartesiane perché è più semplice visualizzare le configurazioni corrette dell'estremità dell'effettore in coordinate cartesiane che non nelle coordinate dei giunti. Inoltre, le coordinate dei giunti non sono utilizzabili come sistema di coordinate operativo perché gli assi dei giunti della maggior parte dei manipolatori non sono ortogonali e non permettono di distinguere fra posizione e orientamento. Se in questi punti si desiderano le coordinate dei giunti, si può richiamare la routine della soluzione cinematica inversa per effettuare la necessaria conversione.

In genere esistono diverse traiettorie possibili tra le due estremità del percorso. Per esempio, si può desiderare che il manipolatore si muova lungo un percorso rettilineo che congiunga le estremità (traiettoria rettilinea), o che esso si sposti lungo una traiettoria polinomiale uniforme che soddisfi i vincoli della posizione e dell'orientamento per entrambe le estremità (traiettoria interpolata dai giunti). In questo paragrafo tratteremo i formalismi per pianificare sia le traiettorie interpolate dai giunti, sia quelle rettilinee. Per prima cosa tratteremo la pianificazione di traiettorie semplici che soddisfino i vincoli del percorso e in seguito estenderemo il concetto per includere i vincoli dovuti alla dinamica del manipolatore. Un approccio sistematico al problema della pianificazione della traiettoria è vedere il pianificatore come una "scatola nera", come è mostrato in Figura 4.1: il pianificatore della traiettoria riceve in ingresso le variabili che indicano i vincoli del percorso e fornisce in uscita una sequenza di configurazioni intermedie della mano del manipolatore in relazione al tempo (posizione e orientamento, velocità e accelerazione), espresse sia in coordinate cartesiane sia in quelle del giunto, dallo stato iniziale a quello finale. Per pianificare le traiettorie del manipolatore sono comunemente usati due me-

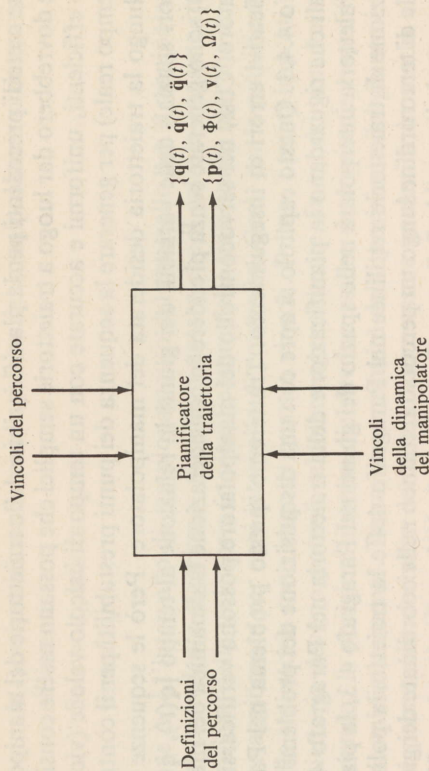


Figura 4.1 Diagramma a blocchi del pianificatore della traiettoria.

todi. Il primo richiede all'operatore di specificare esplicitamente un insieme di vincoli (per esempio: continuità e regolarità) per posizione, velocità e accelerazione delle coordinate generalizzate del manipolatore in determinati punti (chiamati *punti nodali* o *punti di interpolazione*) lungo la traiettoria. Il pianificatore della traiettoria seleziona quindi una traiettoria parametrica da una classe di funzioni (solitamente la classe di funzioni polinomiali di grado  $n$  o minore, per un dato  $n$ , nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_f]$ ) che "interpolano" e soddisfa i vincoli ai punti di interpolazione. Nel secondo approccio, l'operatore specifica esplicitamente il percorso che il manipolatore deve compiere grazie a una funzione analitica, quale per esempio un percorso rettilineo in coordinate cartesiane, e il pianificatore delle traiettorie determina la traiettoria desiderata, nelle coordinate dei giunti o in coordinate cartesiane, che approssima il percorso richiesto. Nel primo approccio la definizione degli ostacoli e la pianificazione della traiettoria sono effettuate nelle coordinate dei giunti. Dal momento che non sono imposti vincoli alla mano del manipolatore, è difficile per l'operatore seguire il suo percorso. Quindi, la mano del manipolatore può urtare ostacoli senza alcun preavviso. Nel secondo approccio, i vincoli del percorso sono rappresentati in coordinate cartesiane, e gli attuatori dei giunti sono controllati secondo le coordinate dei giunti. Dunque, per trovare una traiettoria che approssimi convenientemente il percorso desiderato, si devono prima convertire i vincoli espressi in coordinate cartesiane nei corrispondenti vincoli nello spazio dei giunti mediante approssimazioni funzionali, e in seguito trovare una traiettoria parametrica che soddisfi i vincoli nello spazio dei giunti.



I due metodi precedenti per la pianificazione delle traiettorie del manipolatore dovrebbero dar luogo a traiettorie semplici che possano essere considerate efficienti, uniformi e accurate con un tempo di calcolo veloce (vicino al tempo reale) per generare la sequenza dei punti prestabiliti per il controllo, lungo la traiettoria desiderata del manipolatore. Però le sequenze dei vettori spaziali delle variabili dei giunti in relazione al tempo  $\{\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)\}$  sono generate senza prendere in considerazione la dinamica del manipolatore. Così, nel servocomando del manipolatore possono verificarsi significativi errori di inseguimento. Tratteremo questo problema nel Paragrafo 4.4.3. Questo capitolo si apre con una disquisizione dei problemi generali che riguardano la pianificazione della traiettoria nel Paragrafo 4.2, la traiettoria interpolata nello spazio dei giunti nel Paragrafo 4.3, la pianificazione di traiettorie rettilinee nel Paragrafo 4.4 e la traiettoria polinomiale di terzo ordine lungo un percorso rettilineo nelle coordinate dei giunti che prende in considerazione anche la dinamica del manipolatore, nel Paragrafo 4.4.3. Il Paragrafo 4.5 riassume i risultati.

## 4.2 CONSIDERAZIONI GENERALI SULLA PIANIFICAZIONE DELLA TRAIETTORIA

La pianificazione della traiettoria può essere effettuata sia nelle coordinate dei giunti, sia in coordinate cartesiane. Per la pianificazione nello spazio dei giunti, si programmano in funzione del tempo tutte le variabili dei giunti e le loro prime due derivate per descrivere il movimento desiderato del manipolatore. Per la pianificazione nello spazio cartesiano, si programma in funzione del tempo tutte le variabili che descrivono posizione, velocità e accelerazione della pinza del manipolatore, e si calcolano le corrispondenti posizioni, velocità e accelerazioni dei giunti. Pianificare nello spazio dei giunti presenta tre vantaggi: (1) la traiettoria è stabilita direttamente in relazione alle variabili controllate durante il movimento, (2) la pianificazione della traiettoria può essere eseguita in un tempo vicino al tempo reale, e (3) le traiettorie dei giunti sono più semplici da pianificare. Lo svantaggio insito in questo procedimento è la difficoltà nel determinare la posizione dei link e della mano durante il movimento, un compito che è solitamente richiesto per garantire di evitare ostacoli lungo la traiettoria.

In generale, l'algoritmo fondamentale per generare i punti di funzionamento richiesti dalla traiettoria è piuttosto semplice:

$$t = t_0;$$

*loop:* attende il prossimo intervallo di controllo;

$$t = t + \Delta t;$$

$\mathbf{h}(t)$  = posizione in cui il giunto del manipolatore si deve trovare all'istante  $t$ ;

Se  $t = t_f$ , allora esce;

va a *loop*;

dove  $\Delta t$  è l'intervallo di campionamento del controllo per il manipolatore. Dal precedente algoritmo, possiamo notare che il calcolo consiste in una funzione della traiettoria (o pianificatore della traiettoria)  $\mathbf{h}(t)$  che deve essere aggiornata per ogni intervallo di controllo. Così, per la pianificazione della traiettoria sono imposti quattro vincoli. Primo, i punti imposti della traiettoria devono potersi calcolare agevolmente, in modo non iterativo. Secondo, le posizioni intermedie devono essere determinate e specificate deterministicamente. Terzo, la continuità della posizione del giunto e delle sue prime due derivate del tempo deve essere garantita in modo che la traiettoria pianificata del giunto sia uniforme. Infine, i movimenti estranei, come il "tremolio", devono essere minimizzati.

Le quattro precedenti condizioni per pianificare la traiettoria saranno soddisfatte se le evoluzioni delle variabili dei giunti potranno essere specificate con sequenze di polinomi. Se la traiettoria per un dato giunto (per esempio il giunto  $i$ ) utilizza  $p$  polinomi, allora saranno necessari  $3(p+1)$  coefficienti per specificare le condizioni iniziali e finali (posizione, velocità e accelerazione del giunto) e garantire la continuità di queste variabili agli estremi del polinomio. Se è specificata una condizione intermedia addizionale quale la posizione, allora per ogni condizione è richiesto un coefficiente aggiuntivo. In generale, possono essere specificate due posizioni intermedie: una vicino alla posizione iniziale per il sollevamento e l'altra vicino alla posizione finale per l'arrivo che garantiranno sicurezza nel sollevamento e nelle direzioni di avvicinamento alla meta, oltre a un miglioramento del controllo del movimento. Così, sarà sufficiente un polinomio di settimo grado per ogni variabile del giunto che connetta le posizioni iniziali e finali, come lo sarebbero due segmenti biquadratici e uno cubico della traiettoria (4-3-4), due segmenti cubici e uno di quinto grado della traiettoria (3-5-3), o cinque segmenti cubici della traiettoria (3-3-3-3-3). Di ciò discuteremo a fondo nel prossimo paragrafo.

Per il controllo del percorso in coordinate cartesiane, l'algoritmo precedente può essere così modificato:

$$t = t_0$$

*loop:* aspetta il prossimo intervallo di controllo;

$$t = t + \Delta t;$$

$\mathbf{H}(t)$  = stato in cui deve trovarsi la mano del manipolatore nell'istante  $t$ ;



$Q[H(t)]$  = soluzione del giunto corrispondente a  $H(t)$ ;

Se  $t = t_f$ , allora esce;

va a loop;

Qui, oltre al calcolo della funzione della traiettoria della mano  $H(t)$  a ogni intervallo di controllo, dobbiamo convertire le posizioni cartesiane nelle corrispondenti coordinate dei giunti,  $Q[H(t)]$ . La funzione matriciale  $H(t)$  indica la posizione desiderata della mano nell'istante  $t$  e può essere facilmente realizzata servendosi di una matrice di trasformazione  $4 \times 4$ , come discusso nel Paragrafo 4.4.

Generalmente, la pianificazione del percorso cartesiano può essere realizzata in due passi: (1) generare o selezionare un insieme di punti nodali o di interpolazione in coordinate cartesiane seguendo alcune regole lungo il percorso e poi (2) determinare una classe di funzioni per unire questi punti nodali (o per approssimare questi segmenti del percorso) seguendo determinati criteri. Per il secondo passo, i criteri scelti sono spesso dettati dagli algoritmi di controllo che seguono per essere certi di seguire il percorso che si desidera. Vi sono due approcci principali: (1) il metodo operante nello spazio cartesiano nel quale, per la maggior parte, calcoli e ottimizzazioni sono effettuati in coordinate cartesiane e il controllo seguente si esegue a livello della mano\*. I punti di campionamento nel percorso rettilineo desiderato sono selezionati a intervalli di campionamento fissi e sono convertiti nelle loro corrispondenti soluzioni dei giunti in tempo reale durante il controllo del manipolatore. La traiettoria risultante è lineare a tratti. Paul [1979], Taylor [1979] e Luh e Lin [1981] presentano metodi per collegare con segmenti di retta punti nodali cartesiani adiacenti. (2) Il metodo operante nello spazio dei giunti in cui per approssimare il segmento del percorso fra due punti nodali adiacenti sul percorso rettilineo si adottano funzioni polinomiali di basso grado nello spazio dei giunti, e il controllo risultante è effettuato a livello del giunto\*\*. Il percorso cartesiano risultante è una sequenza lineare non spezzata. La traiettoria del giunto a deviazione limitata di Taylor (Taylor [1979]) e il metodo della traiettoria polinomiale di terzo ordine di Lin (Lin et al. [1983]) usano entrambi polinomi di basso grado nello spazio dei giunti per approssimare il percorso rettilineo.

Il metodo cartesiano di orientamento nello spazio ha il vantaggio di essere un concetto chiaro e, lungo il percorso rettilineo desiderato, è assicurato

\*Il segnale di errore per gli attuatori dei giunti è calcolato basandosi sull'errore tra la posizione cartesiana del bersaglio e l'effettiva posizione cartesiana della mano.

\*\*Il segnale di errore per gli attuatori dei giunti è calcolato basandosi sull'errore tra la posizione del bersaglio e l'attuale posizione della mano, entrambe espresse in coordinate dei giunti.

un certo grado di accuratezza. Comunque, dal momento che tutti gli algoritmi di controllo utilizzabili sono invariabilmente basati sulle coordinate del giunto perché, finora, non ci sono sensori in grado di misurare la posizione della mano del manipolatore in coordinate cartesiane, la pianificazione del percorso nello spazio cartesiano richiede trasformazioni tra le coordinate cartesiane e quelle del giunto in tempo reale: un compito pesante dal punto di vista computazionale che porta spesso a intervalli di controllo più lunghi. Inoltre, la trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate dei giunti è mal definita perché non è univoca. Ancora, se nello stadio di pianificazione della traiettoria è compresa la dinamica del manipolatore, allora i vincoli del percorso saranno espressi in coordinate cartesiane mentre i vincoli fisici, come il momento di una forza e la forza, la velocità e l'accelerazione limite di ogni motore dei giunti, saranno espresse in coordinate del giunto. Così, il risultante problema dell'ottimizzazione avrà vincoli misti in due differenti sistemi di coordinate.

A causa dei diversi svantaggi menzionati in precedenza, si fa ampio uso del metodo dell'orientamento spaziale del giunto, che converte i punti nodali cartesiani nelle loro corrispondenti coordinate dei giunti e utilizza polinomi di basso grado per interpolare questi punti nodali del giunto. Tale metodo ha il vantaggio di essere computazionalmente più veloce e rende più facile il lavoro con i vincoli della dinamica del manipolatore. Comunque esso perde precisione lungo il percorso cartesiano quando i punti campione cadono su polinomi adattati e uniformi. Nel Paragrafo 4.4 esamineremo vari schemi di pianificazione secondo questi approcci.

### 4.3 TRAIETTORIE INTERPOLATE NELLO SPAZIO DEI GIUNTI

Per controllare un manipolatore, si richiede che sia specificata la configurazione del braccio in entrambi gli stati, iniziale e finale, prima che si possa pianificare la traiettoria del movimento. Per progettare una traiettoria del moto interpolata nello spazio dei giunti per il braccio di un robot, Paul [1972] ha messo in rilievo le seguenti considerazioni:

1. Quando si prende un oggetto, il moto della mano deve avvenire in direzione opposta a esso: in caso contrario la mano potrebbe urtare la superficie di supporto dell'oggetto.
2. Se specifichiamo una posizione di sollevamento (punto di partenza) lungo il vettore normale alla superficie di appoggio e diretto lontano da essa, e se richiediamo alla mano (cioè all'origine del sistema di coordinate della mano) di passare per questa posizione, abbiamo un movimento di sollevamento accettabile. Se, inoltre, specifichiamo il tempo richiesto

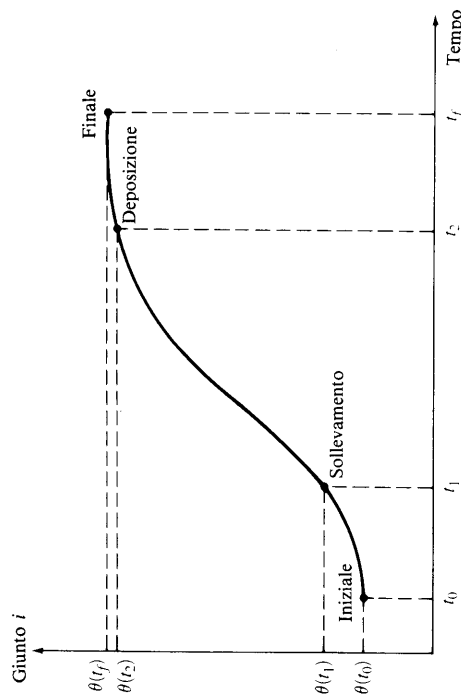


Figura 4.2 Condizioni di posizione per una traiettoria di giunto.

per raggiungere questa posizione, potremo controllare la velocità alla quale deve essere spostato l'oggetto.

- Lo stesso insieme di condizioni per la partenza nel moto del braccio è valido anche per il punto di deposizione nella posizione finale del moto (cioè dobbiamo spostarci in un punto normale al di fuori della superficie e quindi rallentare fino a raggiungere la posizione finale) in modo tale da ottenere e controllare la direzione corretta dell'approccio.
- Da quanto precede, abbiamo quattro posizioni per ogni movimento del braccio: iniziale, di sollevamento, di deposizione e finale (vedi Figura 4.2).
- Vincoli delle posizioni
  - Posizione iniziale: sono date velocità e accelerazione (solitamente nulle).
  - Posizione di sollevamento: moto continuo attraverso punti intermedi.
  - Posizione di deposizione: come la posizione di sollevamento.
  - Posizione finale: sono date velocità e accelerazione (normalmente nulle).
- Oltre a questi vincoli, le estremità di tutte le traiettorie dei giunti devono essere entro i limiti geometrici e fisici di ciascun giunto.
- Considerazioni sui tempi
  - Segmenti iniziali e finali della traiettoria: il tempo è basato sulla velocità di avvicinamento della mano alla e dalla superficie e su alcune costanti dovute alle caratteristiche dei motori dei giunti.

(b) Punti intermedi o sezione intermedia della traiettoria: il tempo è basato su velocità e accelerazione massime dei giunti, e si usa il massimo di questi tempi (cioè, per la normalizzazione si usa il tempo massimo del giunto più lento).

I vincoli di una traiettoria tipica dei giunti sono elencati nella Tabella 4.2. Facendo riferimento a queste costanti, siamo interessati a selezionare una classe di funzioni di polinomi di grado  $n$  o inferiore in modo che siano soddisfatte le posizioni dei giunti richieste, la velocità e l'accelerazione per questi punti nodali (iniziale, di sollevamento, di deposizione e finale), e la posizione dei giunti, la velocità, e l'accelerazione siano continue nell'intervallo di tempo complessivo  $[t_0, t_f]$ . Un metodo consiste nel definire un polinomio di settimo grado per ciascun giunto  $i$ ,

$$q_i(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (4.3.1)$$

dove i coefficienti incogniti  $a_j$  possono essere determinati dalle posizioni note e dalle condizioni di continuità. Comunque, l'uso di un polinomio di

Tabella 4.2 Vincoli per la pianificazione della traiettoria interpolata nello spazio dei giunti.

#### Posizione iniziale:

- Posizione (data)
- Velocità (data, normalmente zero)
- Accelerazione (data, normalmente zero)

#### Posizioni intermedie:

- Posizione di sollevamento
- Posizione di sollevamento (continua rispetto al precedente segmento di traiettoria)
- Velocità (continua rispetto al precedente segmento di traiettoria)
- Accelerazione (continua rispetto al precedente segmento di traiettoria)
- Posizione di deposizione (data)
- Posizione di deposizione (continua rispetto al successivo segmento di traiettoria)
- Velocità (continua rispetto al successivo segmento di traiettoria)
- Accelerazione (continua rispetto al successivo segmento di traiettoria)

#### Posizione finale:

- Posizione (data)
- Velocità (data, normalmente zero)
- Accelerazione (data, normalmente zero)

grado così alto per interpolare i punti nodali dati può essere insoddisfacente. È difficile trovare i suoi limiti, e tende ad avere movimenti inutili. Un'alternativa a questo metodo è scindere la traiettoria complessiva dei giunti in diversi segmenti, in modo da poter usare differenti polinomi interpolanti di basso grado per interpolare ogni segmento della traiettoria. Vi sono modi diversi per dividere la traiettoria dei giunti, e ogni metodo ha proprietà differenti. I metodi più comuni sono i seguenti:

**Traiettoria 4-3-4.** Ciascun giunto ha i seguenti tre segmenti di traiettoria: il primo segmento è un polinomio di quarto grado che specifica la traiettoria dalla posizione iniziale alla posizione di sollevamento. Il secondo segmento della traiettoria (o segmento di semitraiettoria) è un polinomio di terzo grado che rappresenta la traiettoria dalla posizione di sollevamento a quella di deposizione. L'ultimo segmento della traiettoria consiste in un polinomio di quarto grado che specifica la traiettoria dalla posizione di deposizione a quella finale.

**Traiettoria 3-5-3.** È simile alla traiettoria 4-3-4, ma utilizza polinomi di grado differente per ogni segmento: un polinomio di terzo grado per il primo segmento, uno di quinto grado per il secondo segmento e uno di terzo grado per l'ultimo segmento.

**Traiettoria 5-cubica.** Si utilizzano funzioni cubiche spline polinomiali di terzo grado per cinque segmenti di traiettoria.

Si noti che la trattazione precedente è valida per la traiettoria di ogni giunto, cioè la traiettoria di ogni giunto è ripartita in tre o in cinque segmenti. Il numero dei polinomi per la traiettoria 4-3-4 di un manipolatore a  $N$  giunti avrà  $N$  traiettorie del giunto o  $N \times 3 = 3N$  segmenti di traiettoria e  $7N$  coefficienti polinomiali da valutare, più le estremità dei  $3N$  segmenti della traiettoria. Nei prossimi paragrafi tratteremo la pianificazione della traiettoria 4-3-4 e della 5-cubica.

#### 4.3.1 CALCOLO DELLA TRAIETTORIA DEI GIUNTI 4-3-4

Dato che stiamo determinando  $N$  traiettorie di giunto per ogni segmento di traiettoria, è opportuno introdurre una variabile di tempo normalizzata,  $t \in [0, 1]$ , che ci consenta di trattare le equazioni di ogni segmento per ogni angolo del giunto allo stesso modo, col tempo che varia da  $t = 0$  (tempo iniziale per tutti i segmenti della traiettoria) a  $t = 1$  (tempo finale per tutti i segmenti della traiettoria). Definiamo le seguenti variabili.

$t$ : variabile del tempo normalizzata,  $t \in [0, 1]$   
 $\tau$ : tempo reale espresso in secondi

$\tau_i$ : tempo reale all'estremità del segmento  $i$ -esimo della traiettoria  
 $t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ : tempo reale richiesto per percorrere il segmento  $i$ -esimo  
 $t = (\tau - \tau_{i-1}) / (\tau_i - \tau_{i-1})$ ;  $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ ;  $t \in [0, 1]$

La traiettoria consiste nelle sequenze polinomiali,  $h_i(t)$ , che insieme costituiscono la traiettoria del giunto  $j$ . Le equazioni polinomiali per ogni variabile del giunto in ogni segmento della traiettoria espresse in tempo normalizzato sono:

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \quad (1^\circ \text{ segmento}) \quad (4.3.2)$$

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} \quad (2^\circ \text{ segmento}) \quad (4.3.3)$$

$$e \quad h_n(t) = a_{n4}t^4 + a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0} \quad (3^\circ \text{ segmento}) \quad (4.3.4)$$

Il deponente di ogni equazione polinomiale indica il numero del segmento e  $n$  indica l'ultimo segmento della traiettoria. Il coefficiente incognito  $a_{ji}$  indica il coefficiente  $i$ -esimo per il segmento di traiettoria  $j$  della traiettoria di un giunto. Le condizioni al contorno che questo insieme di polinomi dei segmenti di traiettoria dei giunti deve soddisfare sono:

1. Posizione iniziale =  $\theta_0 = \theta(t_0)$
2. Entità della velocità iniziale =  $v_0$  (solitamente zero)
3. Entità dell'accelerazione iniziale =  $a_0$  (solitamente zero)
4. Posizione di sollevamento =  $\theta_i = \theta(t_i)$
5. Continuità nella posizione per  $t_1$  [ $\theta(t_1^-) = \theta(t_1^+)$ ]
6. Continuità nella velocità per  $t_1$  [ $v(t_1^-) = v(t_1^+)$ ]
7. Continuità dell'accelerazione per  $t_1$  [ $a(t_1^-) = a(t_1^+)$ ]
8. Posizione di deposizione =  $\theta_2 = \theta(t_2)$
9. Continuità nella posizione all'istante  $t_2$  [ $\theta(t_2^-) = \theta(t_2^+)$ ]
10. Continuità nella velocità all'istante  $t_2$  [ $v(t_2^-) = v(t_2^+)$ ]
11. Continuità nell'accelerazione all'istante  $t_2$  [ $a(t_2^-) = a(t_2^+)$ ]
12. Posizione finale =  $\theta_j = \theta(t_j)$
13. Entità della velocità finale =  $v_j$  (solitamente zero)
14. Entità dell'accelerazione finale =  $a_j$  (solitamente zero)

Le condizioni agli estremi per la traiettoria 4-3-4 sono evidenziate nella Figura 4.3. La prima e la seconda derivata di queste equazioni polinomiali possono essere scritte, rispetto al tempo reale  $\tau$ :

$$v_i(t) = \frac{dh_i(t)}{d\tau} = \frac{dh_i(t)}{dt} \frac{1}{d\tau} = \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} \frac{dh_i(t)}{dt} \quad (4.3.5)$$

$$= \frac{1}{t_i} \frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{1}{t_i} \dot{h}_i(t) \quad i = 1, 2, n \quad (4.3.5)$$

e

$$a_i(t) = \frac{d^2h_i(t)}{d\pi^2} = \frac{1}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} \frac{d^2h_i(t)}{dt^2} \\ = \frac{1}{t_i^2} \frac{d^2h_i(t)}{dt^2} = \frac{1}{t_i^2} \ddot{h}_i(t) \quad i = 1, 2, n \quad (4.3.6)$$

Per il primo segmento della traiettoria, l'equazione polinomiale dominante è di quarto grado:

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \quad t \in [0, 1] \quad (4.3.7)$$

Dalle (4.3.5) e (4.3.6), le prime due derivate del tempo rispetto al tempo reale sono:

$$v_1(t) = \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1} \quad (4.3.8)$$

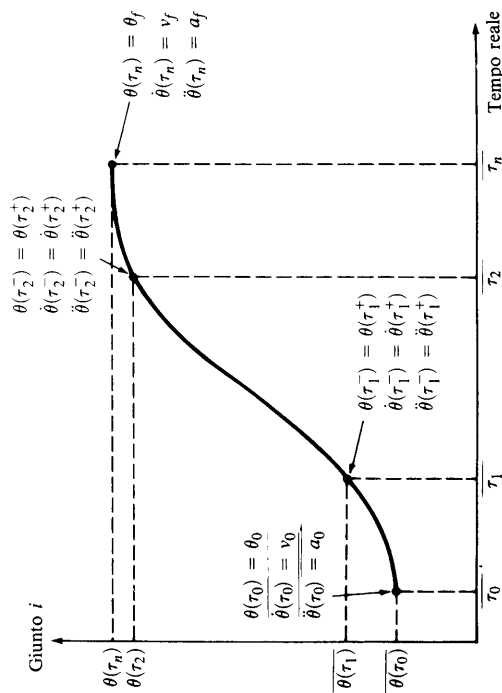


Figura 4.3 Condizioni al contorno per una traiettoria 4-3-4 nello spazio dei giunti.

e

$$a_1(t) = \frac{\ddot{h}_1(t)}{t_1^2} = \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2} \quad (4.3.9)$$

1. Per  $t = 0$  (nella posizione iniziale di questo segmento di traiettoria). Soddisfare le condizioni agli estremi per questa posizione ci conduce a:

$$a_{10} = h_1(0) = \theta_0 \quad (\text{dato}) \quad (4.3.10)$$

$$v_0 = \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \left[ \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1} \right]_{t=0} = \frac{a_{11}}{t_1} \quad (4.3.11)$$

che dà:

$$a_{11} = v_0 t_1$$

e

$$a_0 = \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \left[ \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2} \right]_{t=0} = \frac{2a_{12}}{t_1^2} \quad (4.3.12)$$

che porta a:

$$a_{12} = \frac{a_0 t_1^2}{2}$$

Determinate queste incognite, la (4.3.7) può essere scritta nuovamente come:

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1)t + \theta_0 \quad t \in [0, 1] \quad (4.3.13)$$

2. Per  $t = 1$  (nella posizione finale di questo segmento della traiettoria). Per questa posizione, ci asteniamo dal richiedere che il polinomio interpolante debba passare esattamente per la posizione. Richiediamo soltanto che la velocità e l'accelerazione per questa posizione debbano esse-

re continue rispettivamente in relazione alla velocità e all'accelerazione all'inizio del successivo segmento della traiettoria. Velocità e accelerazione per questa posizione sono:

$$v_1(1) \triangleq v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{4a_{14} + 3a_{13} + a_0 t_1^2 + v_0 t_1}{t_1} \quad (4.3.14)$$

$$a_1(1) \triangleq a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{12a_{14} + 6a_{13} + a_0 t_1^2}{t_1^2} \quad (4.3.15)$$

Per il secondo segmento della traiettoria, l'equazione polinomiale principale è di terzo grado:

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} \quad t \in [0, 1] \quad (4.3.16)$$

1. Per  $t = 0$  (per la posizione di sollevamento). Facendo uso delle (4.3.5) e (4.3.6), velocità e accelerazione per queste posizioni sono, rispettivamente:

$$h_2(0) = a_{20} = \theta_2(0) \quad (4.3.17)$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \left[ \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \right]_{t=0} = \frac{a_{21}}{t_2} \quad (4.3.18)$$

che dà:

$$a_{21} = v_1 t_2$$

e

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \left[ \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \right]_{t=0} = \frac{2a_{22}}{t_2^2} \quad (4.3.19)$$

che porta a:

$$a_{22} = \frac{a_1 t_2^2}{2}$$

Dato che velocità e accelerazione in questa posizione devono essere continue rispettivamente con velocità e accelerazione della fine del precedente segmento di traiettoria abbiamo:

$$\frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \quad (4.3.20)$$

che conduce, rispettivamente a:

$$\left[ \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \right]_{t=0} = \left[ \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1} \right]_{t=1} \quad (4.3.21)$$

o

$$-\frac{a_{21}}{t_2} + \frac{4a_{14}}{t_1} + \frac{3a_{13}}{t_1} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1} + \frac{v_0 t_1}{t_1} = 0 \quad (4.3.22)$$

e

$$\left[ \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \right]_{t=0} = \left[ \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2} \right]_{t=1} \quad (4.3.23)$$

o

$$-\frac{2a_{22}}{t_2^2} + \frac{12a_{14}}{t_1^2} + \frac{6a_{13}}{t_1^2} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1^2} = 0 \quad (4.3.24)$$

2. Per  $t = 1$  (nella posizione di deposizione). Ancora, velocità e accelerazione in questa posizione devono essere continue relativamente a velocità e orientamento all'inizio del successivo segmento di traiettoria:

$$h_2(1) = a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20} \quad (4.3.25)$$

$$v_2(1) = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \left[ \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \right]_{t=1} \quad (4.3.26)$$



$$= \frac{3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}}{t_2}$$

e

$$a_2(1) = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2^2} = \left[ \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \right]_{t=1} = \frac{6a_{23} + 2a_{22}}{t_2^2} \quad (4.3.27)$$

Per l'ultimo segmento della traiettoria, l'equazione polinomiale principale è di quarto grado:

$$h_n(t) = a_{n4}t^4 + a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0} \quad t \in [0, 1] \quad (4.3.28)$$

Se sostituiamo  $\bar{t} = t - 1$  a  $t$  nell'equazione precedente, avremo fatto slittare il tempo normalizzato  $t$  da  $t \in [0, 1]$  a  $t \in [-1, 0]$ . Allora la (4.3.28) diviene:

$$h_n(\bar{t}) = a_{n4}\bar{t}^4 + a_{n3}\bar{t}^3 + a_{n2}\bar{t}^2 + a_{n1}\bar{t} + a_{n0} \quad \bar{t} \in [-1, 0] \quad (4.3.29)$$

Utilizzando le (4.3.5) e (4.3.6), la derivata prima e seconda rispetto al tempo reale è:

$$v_n(\bar{t}) = \frac{\dot{h}_n(\bar{t})}{t_n} = \frac{4a_{n4}\bar{t}^3 + 3a_{n3}\bar{t}^2 + 2a_{n2}\bar{t} + a_{n1}}{t_n} \quad (4.3.30)$$

e

$$a_n(\bar{t}) = \frac{\ddot{h}_n(\bar{t})}{t_n^2} = \frac{12a_{n4}\bar{t}^2 + 6a_{n3}\bar{t} + 2a_{n2}}{t_n^2} \quad (4.3.31)$$

1. Per  $\bar{t} = 0$  (nella posizione finale di questo segmento). Soddisfacendo le condizioni agli estremi per questa posizione finale della traiettoria, abbiamo:

$$h_n(0) = a_{n0} = \theta_f \quad (4.3.32)$$

$$v_f = \frac{\dot{h}_n(0)}{t_n} = \frac{a_{n1}}{t_n} \quad (4.3.33)$$

da cui:

$$a_{n1} = v_f t_n$$

e

$$a_f = \frac{\ddot{h}_n(0)}{t_n^2} = \frac{2a_{n2}}{t_n^2} \quad (4.3.34)$$

che dà:

$$a_{n2} = \frac{a_f t_n^2}{2}$$

2. Per  $\bar{t} = -1$  (nella posizione iniziale di questo segmento della traiettoria). Soddisfacendo le condizioni al contorno per questa posizione, abbiamo, per la posizione di deposizione:

$$h_n(-1) = a_{n4} - a_{n3} + \frac{a_f t_n^2}{2} - v_f t_n + \theta_f = \theta_2(1) \quad (4.3.35)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\dot{h}_n(-1)}{t_n} &= \left[ \frac{4a_{n4}\bar{t}^3 + 3a_{n3}\bar{t}^2 + 2a_{n2}\bar{t} + a_{n1}}{t_n} \right]_{\bar{t}=-1} \\ &= \frac{-4a_{n4} + 3a_{n3} - a_f t_n^2 + v_f t_n}{t_n} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{h}_n(-1)}{t_n^2} &= \left[ \frac{12a_{n4}\bar{t}^2 + 6a_{n3}\bar{t} + 2a_{n2}}{t_n^2} \right]_{\bar{t}=-1} \\ &= \frac{12a_{n4} - 6a_{n3} + a_f t_n^2}{t_n^2} \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Le condizioni di continuità per velocità e accelerazione in questo punto di deposizione sono:

$$\frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{\dot{h}_n(-1)}{t_n} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_n(-1)}{t_n^2} \quad (4.3.38)$$

o

$$\frac{4a_{n4} - 3a_{n3} + a_f t_n^2 - v_f t_n}{t_n} + \frac{3a_{23}}{t_2} + \frac{2a_{22}}{t_2} + \frac{a_{21}}{t_2} = 0 \quad (4.3.39)$$

e

$$\frac{-12a_{n4} + 6a_{n3} - a_f t_n^2}{t_n^2} + \frac{6a_{23}}{t_2^2} + \frac{2a_{22}}{t_2^2} = 0 \quad (4.3.40)$$

Si trova che la differenza degli angoli dei giunti tra segmenti adiacenti della traiettoria è:

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta_0 = h_1(1) - h_1(0) = a_{14} + a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1 \quad (4.3.41)$$

$$\delta_2 = \theta_2 - \theta_1 = h_2(1) - h_2(0) = a_{23} + a_{22} + a_{21} \quad (4.3.42)$$

e

$$\delta_n = \theta_f - \theta_2 = h_n(0) - h_n(-1) = -a_{n4} + a_{n3} - \frac{a_f t_n^2}{2} + v_f t_n \quad (4.3.43)$$

Tutti i coefficienti incogniti delle equazioni polinomiali della traiettoria possono essere determinati risolvendo simultaneamente le (4.3.41), (4.3.22), (4.3.24), (4.3.42), (4.3.39), (4.3.40) e (4.3.43). Riscrivendole in notazione matriciale e vettoriale, abbiamo:

$$y = Cx \quad (4.3.44)$$

dove:

$$y = \begin{bmatrix} \delta_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - v_0 t_1, -a_0 t_1 - v_0, -a_0, \delta_2, \\ -a_f t_n + v_f, a_f, \delta_n + \frac{a_f t_n^2}{2} - v_f t_n \end{bmatrix}^T \quad (4.3.45)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/t_1 & 4/t_1 & -1/t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/t_1^2 & 12/t_1^2 & 0 & -2/t_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_2 & 2/t_2 & 3/t_2 & -3/t_n & 4/t_n & 4/t_n \\ 0 & 0 & 0 & 2/t_2^2 & 6/t_2^2 & 6/t_n^2 & -12/t_n^2 & -12/t_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3.46)$$

$$\text{e} \quad x = (a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{n3}, a_{n4})^T \quad (4.3.47)$$

Allora, la pianificazione della traiettoria (per ogni giunto) si riduce alla risoluzione dell'equazione matriciale vettoriale nella (4.3.44):

$$y_i = \sum_{j=1}^7 c_{ij} x_j \quad (4.3.48)$$

$$0 \quad x = C^{-1}y \quad (4.3.49)$$

La struttura della matrice  $C$  semplifica il calcolo dei coefficienti incogniti e la matrice inversa di  $C$  esiste sempre se gli intervalli di tempo  $t_i$ ,  $i = 1, 2, n$  sono valori positivi. Risolvendo la (4.3.49), otteniamo tutti i coefficienti per le equazioni polinomiali per i segmenti della traiettoria per il giunto  $j$ .

Dato che abbiamo effettuato una sostituzione in tempo normalizzato per passare da  $[0, 1]$  a  $[-1, 0]$  per l'ultimo segmento della traiettoria, dopo aver ottenuto i coefficienti  $a_n$  dall'equazione matriciale precedente, dobbiamo riconvertire il tempo normalizzato in  $[0, 1]$ . Questo si può ottenere sostituendo  $t = t+1$  in  $t$  nella (4.3.29). Così otteniamo:



$$\begin{aligned}
 h_n(t) = & a_{n4}t^4 + (-4a_{n4} + a_{n3})t^3 + (6a_{n4} - 3a_{n3} + a_{n2})t^2 \\
 & + (-4a_{n4} + 3a_{n3} - 2a_{n2} + a_{n1})t \\
 & + (a_{n4} - a_{n3} + a_{n2} - a_{n1} + a_{n0}) \quad t \in [0, 1] \quad (4.3.50)
 \end{aligned}$$

Le equazioni polinomiali risultanti per la traiettoria 4-3-4, ottenute risolvendo l'equazione matriciale precedente, sono elencate nella Tabella 4.3. In modo analogo, possiamo applicare questa tecnica per calcolare una traiettoria 3-5-3. Ciò è lasciato come esercizio al lettore. Le equazioni polinomiali per una traiettoria 3-5-3 sono elencate nella Tabella 4.4.

#### 4.3.2 TRAIETTORIA SPLINE CUBICA (5-CUBICA)

L'interpolazione di una data funzione grazie a un insieme di polinomi cubici, preservando la continuità delle derivate prima e seconda nei punti di interpolazione è detta funzione spline cubica. Il grado di approssimazione e di uniformità che si raggiunge è relativamente buono. In generale, una curva spline è un polinomio di grado  $k$ , con continuità della derivata di ordine  $k-1$  nei punti di interpolazione. Nel caso di spline cubiche, la prima derivata rappresenta la continuità nella velocità e la seconda rappresenta la continuità nell'accelerazione. Le spline cubiche offrono molti vantaggi. Primo, si tratta della funzione polinomiale di grado più basso atta a consentire la continuità nella velocità e nell'accelerazione. Secondo, i polinomi di basso grado riducono gli sforzi computazionali e le possibilità di instabilità numerica.

L'equazione generale di polinomi 5-cubici per ogni segmento della traiettoria del giunto è:

$$h_j(t) = a_{j3}t^3 + a_{j2}t^2 + a_{j1}t + a_{j0} \quad j = 1, 2, 3, 4, n \quad (4.3.51)$$

con  $\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j$  e  $t \in [0, 1]$ . Il coefficiente incognito  $a_{ji}$  indica il coefficiente  $i$ -esimo per la traiettoria del giunto  $j$ , e  $n$  indica l'ultimo segmento della traiettoria.

Nell'uso dell'interpolazione con polinomi 5-cubici, sono necessari cinque segmenti della traiettoria e sei punti di interpolazione. D'altra parte, dalle nostre precedenti trattazioni abbiamo solo quattro posizioni per l'interpolazione, e precisamente il punto iniziale, quello di partenza, quello di deposizione e quello finale. Così, devono essere selezionati due ulteriori punti di interpolazione per fornire sufficienti condizioni limite per la risoluzione dei coefficienti incogniti nelle sequenze di polinomi. Possiamo scegliere

**Tabella 4.3** Equazioni polinomiali per la traiettoria 4-3-4 dei giunti.

##### Primo segmento di traiettoria:

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - \sigma \right] t^4 + \sigma t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0$$

$$\dot{h}_1(1) = \frac{4\delta_1}{t_1} - 3v_0 - a_0 t_1 - \frac{\sigma}{t_1}$$

$$\ddot{h}_1(1) = \frac{12\delta_1}{t_1^2} - \frac{12v_0}{t_1} - 5a_0 - \frac{6\sigma}{t_1^2}$$

##### Secondo segmento di traiettoria:

$$h_2(t) = \left[ \delta_2 - v_1 t_2 - \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2) t + \theta_1$$

$$\dot{h}_2(1) = \frac{3\delta_2}{t_2} - 2v_1 - \frac{a_1 t_2}{2}$$

$$\ddot{h}_2(1) = \frac{6\delta_2}{t_2^2} - \frac{6v_1}{t_2} - 2a_1 t_2$$

##### Ultimo segmento di traiettoria:

$$\begin{aligned}
 h_n(t) = & \left[ 9\delta_n - 4v_2 t_n - \frac{a_2 t_n^2}{2} - 5v_1 t_n + \frac{a_1 t_n^2}{2} \right] t^4 \\
 & + \left[ -8\delta_n + 5v_1 t_n - \frac{a_1 t_n^2}{2} + 3v_2 t_n \right] t^3 + \left[ \frac{a_2 t_n^2}{2} \right] t^2 + (v_2 t_n) t + \theta_2
 \end{aligned}$$

dove  $\sigma = f/g$  e

$$\begin{aligned}
 f = & 2\delta_1 \left[ 4 + \frac{2t_n}{t_2} + \frac{2t_n}{t_1} + \frac{3t_2}{t_1} \right] - \frac{\delta_2 t_1}{t_2} \left[ 3 + \frac{t_n}{t_2} \right] + \frac{2\delta_n t_1}{t_n} \\
 - & v_0 t_1 \left[ 6 + \frac{6t_2}{t_1} + \frac{4t_n}{t_1} + \frac{3t_n}{t_2} \right] - v_1 t_1 - a_0 t_1 t_n \left[ \frac{5}{3} + \frac{t_1}{t_2} + \frac{2t_1}{t_n} + \frac{5t_2}{2t_n} \right] + a_1 t_1 t_n \\
 g = & \frac{t_n}{t_2} + \frac{2t_n}{t_1} + 2 + \frac{3t_2}{t_1}
 \end{aligned}$$

**Tabella 4.4** Equazioni polinomiali per la traiettoria 3-5-3 dei giunti.

**Primo segmento di traiettoria:**

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2}$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0$$

**Secondo segmento di traiettoria:**

$$h_2(t) = \left[ 6\delta_2 - 3v_1 t_2 - 3v_2 t_2 - \frac{a_1 t_2^2}{2} + \frac{a_2 t_2^2}{2} \right] t^5 + \left[ -15\delta_2 + 8v_1 t_2 + 7v_2 t_2 + \frac{3a_1 t_2^2}{2} - a_2 t_2^2 \right] t^4 + \left[ 10\delta_2 - 6v_1 t_2 - 4v_2 t_2 - \frac{3a_1 t_2^2}{2} + \frac{a_2 t_2^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2) t + \theta_1$$

$$v_2 = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{3\delta_n}{t_n} - 2v_f + \frac{a_f t_n}{2}$$

$$a_2 = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{-6\delta_n}{t_n^2} + \frac{6v_f}{t_n} - 2a_f$$

**Ultimo segmento di traiettoria:**

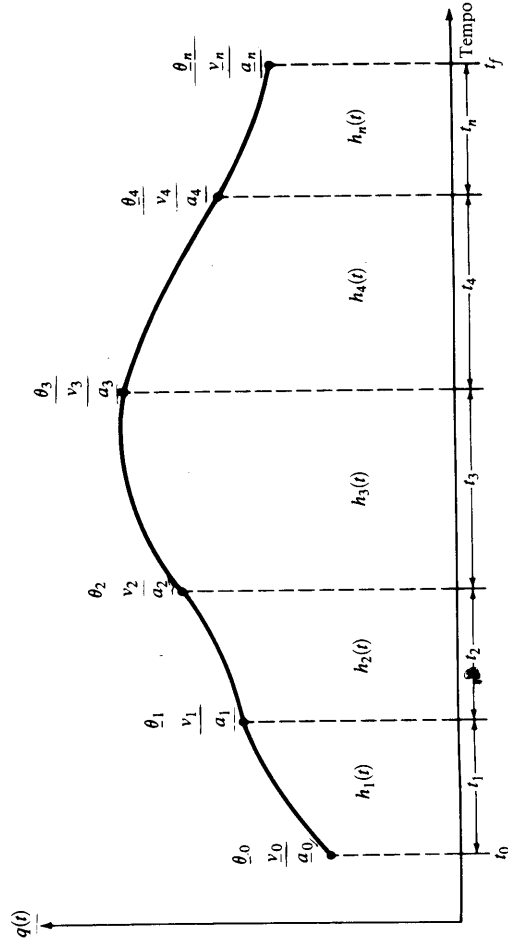
$$h_n(t) = \left[ \delta_n - v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^3 + (-3\delta_n + 3v_f t_n - a_f t_n^2) t^2 + \left[ 3\delta_n - 2v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t + \theta_2$$

questi due ulteriori punti nodali tra la posizione di sollevamento e quella di deposizione. Non è necessario conoscere esattamente questi stati: si richiede soltanto che gli intervalli di tempo siano noti e che sia soddisfatta la continuità della velocità e dell'accelerazione in questi due punti. Così, le condizioni limite che questo insieme di polinomi dei segmenti della traiettoria del giunto deve soddisfare sono: (1) i vincoli della posizione nello stato iniziale, di sollevamento, di deposizione e finale, e (2) la continuità della velocità e dell'accelerazione in tutti i punti di interpolazione. Le condizioni al contorno per una traiettoria dei giunti 5-cubica sono illustrate nella Figura 4.4, dove le variabili sottolineate rappresentano i valori noti prima del calcolo dei polinomi 5-cubici.

La prima e la seconda derivata dei polinomi rispetto al tempo reale sono:

$$v_j(t) = \frac{\dot{h}_j(t)}{t_j} = \frac{3a_{j3}t^2 + 2a_{j2}t + a_{j1}}{t_j} \quad j = 1, 2, 3, 4, n \quad (4.3.52)$$

$$e \quad a_j(t) = \frac{\ddot{h}_j(t)}{t_j^2} = \frac{6a_{j3}t + 2a_{j2}}{t_j^2} \quad j = 1, 2, 3, 4, n \quad (4.3.53)$$



**Figura 4.4** Condizioni al contorno per una traiettoria 5-cubica nello spazio dei giunti.



dove  $t_i$  è il tempo reale richiesto per percorrere il segmento di traiettoria  $j$ -esimo. Date posizioni, velocità e accelerazioni per gli stati iniziale e finale, le equazioni polinomiali per i segmenti di traiettoria iniziale e finale  $[h_1(t)$  e  $h_n(t)]$  sono completamente determinate. Dopo aver calcolato queste equazioni di polinomi, possono essere determinati  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$  e  $h_4(t)$  utilizzando i vincoli della posizione e le condizioni di continuità.

Per il primo segmento della traiettoria, l'equazione polinomiale dominante è:

$$h_1(t) = a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \quad (4.3.54)$$

Per  $t = 0$ , soddisfacendo le condizioni agli estremi in questa posizione, abbiamo:

$$h_1(0) = a_{10} = \theta_0 \quad (\text{dato}) \quad (4.3.55)$$

$$v_0 \triangleq \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \frac{a_{11}}{t_1} \quad (4.3.56)$$

da cui:

$$a_{11} = v_0 t_1$$

$$e \quad a_0 \triangleq \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \frac{2a_{12}}{t_1^2} \quad (4.3.57)$$

che dà:

$$a_{12} = \frac{a_0 t_1^2}{2}$$

Per  $t = 1$ , soddisfacendo i vincoli in questa posizione, abbiamo:

$$h_1(1) = a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1 + \theta_0 = \theta_1 \quad (4.3.58)$$

da cui si trova che  $a_{13}$  è:

$$a_{13} = \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \quad (4.3.59)$$

dove  $\delta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ . Così, il polinomio del primo segmento della traiettoria è interamente determinato:

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0 \quad (4.3.60)$$

Grazie a questa equazione polinomiale, velocità e accelerazione per  $t = 1$  sono:

$$\frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} \triangleq v_1 = \frac{3\delta_1 - (a_0 t_1^2)/2 - 2v_0 t_1}{t_1} = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2} \quad (4.3.61)$$

$$e \quad \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \triangleq a_1 = \frac{6\delta_1 - 2a_0 t_1^2 - 6v_0 t_1}{t_1^2} = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0 \quad (4.3.62)$$

Velocità e accelerazione devono essere continue con velocità e accelerazione all'inizio del successivo segmento della traiettoria.

Per l'ultimo segmento della traiettoria, l'equazione polinomiale è:

$$h_n(t) = a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0} \quad (4.3.63)$$

Per  $t = 0$  e  $t = 1$ , soddisfacendo le condizioni agli estremi, abbiamo:

$$h_n(0) = a_{n0} = \theta_4 \quad (\text{dato}) \quad (4.3.64)$$

$$h_n(1) = a_{n3} + a_{n2} + a_{n1} + \theta_4 = \theta_f \quad (4.3.65)$$

$$\frac{\dot{h}_n(1)}{t_n} \triangleq v_f = \frac{3a_{n3} + 2a_{n2} + a_{n1}}{t_n} \quad (4.3.66)$$

$$e \quad \frac{\ddot{h}_n(1)}{t_n^2} \triangleq a_f = \frac{6a_{n3} + 2a_{n2}}{t_n^2} \quad (4.3.67)$$

Risolvendo le tre equazioni precedenti per i coefficienti incogniti  $a_{n3}$ ,  $a_{n2}$ ,  $a_{n1}$ , otteniamo:

$$h_n(t) = \left[ \delta_n - v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^3 + (-3\delta_n + 3v_f t_n - a_f t_n^2) t^2 + \left[ 3\delta_n - 2v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t + \theta_4 \quad (4.3.68)$$

dove  $\delta_n = \theta_f - \theta_4$ .

Per il secondo segmento della traiettoria, l'equazione è:

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} \quad (4.3.69)$$

Per  $t = 0$ , soddisfacendo il vincolo della posizione e la continuità di velocità e accelerazione del precedente segmento della traiettoria, abbiamo:

$$h_2(0) = a_{20} = \theta_1 \quad (\text{dato}) \quad (4.3.70)$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{a_{21}}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} \quad (4.3.71)$$

cosciché:

$$a_{21} = v_1 t_2$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{2a_{22}}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \quad (4.3.72)$$

che dà:

$$a_{22} = \frac{a_1 t_2^2}{2}$$

Determinate queste incognite, l'equazione polinomiale diventa:

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2)t + \theta_1 \quad (4.3.73)$$

dove

$$v_1 = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2} \quad a_1 = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0$$

e rimane da trovare  $a_{23}$ . Con questa equazione polinomiale, per  $t = 1$ , otteniamo velocità e accelerazione che devono essere continue con velocità e accelerazione all'inizio del successivo segmento della traiettoria.

$$h_2(1) = \theta_2 = a_{23} + \frac{a_1 t_2^2}{2} + v_1 t_2 + \theta_1 \quad (4.3.74)$$

$$\frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = v_2 = \frac{3a_{23} + a_1 t_2^2 + v_1 t_2}{t_2} = v_1 + a_1 t_2 + \frac{3a_{23}}{t_2} \quad (4.3.75)$$

$$\text{e} \quad \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = a_2 = \frac{6a_{23} + a_1 t_2^2}{t_2^2} = a_1 + \frac{6a_{23}}{t_2^2} \quad (4.3.76)$$

Si noti che  $\theta_2$ ,  $v_2$  e  $a_2$  dipendono tutte dal valore di  $a_{23}$ .

Per il terzo segmento della traiettoria, l'equazione è:

$$h_3(t) = a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30} \quad (4.3.77)$$

Per  $t = 0$ , soddisfacendo la continuità di velocità e accelerazione in relazione al precedente segmento della traiettoria, abbiamo:

$$h_3(0) = a_{30} = \theta_2 = a_{23} + \frac{a_1 t_2^2}{2} + v_1 t_2 + \theta_1 \quad (4.3.78)$$

$$v_2 \triangleq \frac{\dot{h}_3(0)}{t_3} = \frac{a_{31}}{t_3} = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} \quad (4.3.79)$$

cosciché:

$$a_{31} = v_2 t_3$$

$$\text{e} \quad a_2 \triangleq \frac{\ddot{h}_3(0)}{t_3^2} = \frac{2a_{32}}{t_3^2} = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} \quad (4.3.80)$$

che dà:

$$a_{32} = \frac{a_2 t_3^2}{2}$$



Con queste incognite indeterminate, l'equazione polinomiale può essere scritta come:

$$h_3(t) = a_{33}t^3 + \left[ \frac{a_2 t_3^2}{2} \right] t^2 + v_2 t_3 t + \theta_2 \quad (4.3.81)$$

Per  $t = 1$ , otteniamo velocità e accelerazione che sono continue rispetto a velocità e accelerazione all'inizio del successivo segmento della traiettoria.

$$h_3(1) = \theta_3 = \theta_2 + v_2 t_3 + \frac{a_2 t_3^2}{2} + a_{33} \quad (4.3.82)$$

$$\frac{\dot{h}_3(1)}{t_3} = v_3 = \frac{3a_{33} + a_2 t_3^2 + v_2 t_3}{t_3} = v_2 + a_2 t_3 + \frac{3a_{33}}{t_3} \quad (4.3.83)$$

$$e \quad \frac{\ddot{h}_3(1)}{t_3^2} = a_3 = \frac{6a_{33} + a_2 t_3^2}{t_3^2} = a_2 + \frac{6a_{33}}{t_3^2} \quad (4.3.84)$$

È da notare che  $\theta_3$ ,  $v_3$  e  $a_3$  dipendono tutte da  $a_{33}$  e implicitamente da  $a_{23}$ .

Per il quarto segmento della traiettoria, l'equazione è:

$$h_4(t) = a_{43}t^3 + a_{42}t^2 + a_{41}t + a_{40} \quad (4.3.85)$$

Per  $t = 0$ , soddisfacendo i vincoli della posizione e la continuità di velocità e accelerazione con il precedente segmento della traiettoria, abbiamo:

$$h_4(0) = a_{40} = \theta_3 = \theta_2 + v_2 t_3 + \frac{a_2 t_3^2}{2} + a_{33} \quad (4.3.86)$$

$$v_3 = \frac{\dot{h}_4(0)}{t_4} = \frac{a_{41}}{t_4} = \frac{\dot{h}_3(1)}{t_3} \quad (4.3.87)$$

che dà:

$$a_{41} = v_3 t_4$$

$$e \quad a_3 = \frac{\ddot{h}_4(0)}{t_4^2} = \frac{2a_{42}}{t_4^2} = \frac{\ddot{h}_3(1)}{t_3^2} \quad (4.3.88)$$

che dà:

$$a_{42} = \frac{a_3 t_4^2}{2}$$

Determinate queste incognite, l'equazione polinomiale diventa:

$$h_4(t) = a_{43}t^3 + \left[ \frac{a_3 t_4^2}{2} \right] t^2 + (v_3 t_4)t + \theta_3 \quad (4.3.89)$$

dove  $\theta_3$ ,  $v_3$  e  $a_3$  sono date, rispettivamente, nelle (4.3.82), (4.3.83) e (4.3.84), e devono essere ancora trovate  $a_{23}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{43}$ . Per determinare interamente le equazioni polinomiali per i tre segmenti intermedi della traiettoria, dobbiamo determinare i coefficienti  $a_{23}$ ,  $a_{33}$ , e  $a_{43}$ . Questo si può ottenere eguagliando la condizione alla fine della traiettoria  $h_4(t)$  con il punto iniziale di  $h_3(t)$ :

$$h_4(1) = a_{43} + \frac{a_3 t_4^2}{2} + v_3 t_4 + \theta_3 = \theta_4 \quad (4.3.90)$$

$$\frac{\dot{h}_4(1)}{t_4} = \frac{3a_{43}}{t_4} + a_3 t_4 + v_3 = v_4 = v_4 = \frac{3\delta_n}{t_n} - 2v_f + \frac{a_f t_n}{2} \quad (4.3.91)$$

$$e \quad \frac{\ddot{h}_4(1)}{t_4^2} = \frac{6a_{43}}{t_4^2} + a_3 = a_4 = \frac{-6\delta_n}{t_n^2} + \frac{6v_f}{t_n} - 2a_f \quad (4.3.92)$$

Queste tre equazioni possono essere risolte per determinare i coefficienti incogniti  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  e  $a_{43}$ . Risolvendo per  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  e  $a_{43}$ , sono determinate completamente le equazioni polinomiali 5-cubiche che sono elencate qui di seguito.

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1)t + \theta_0 \quad (4.3.93)$$

$$v_1 = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2a_0 - \frac{a_0 t_1}{2} \quad a_1 = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0 \quad (4.3.94)$$

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2)t + \theta_1 \quad (4.3.95)$$

$$\theta_2 = a_{23} + \frac{a_1 t_2^2}{2} + v_1 t_2 + \theta_1 \quad (4.3.96)$$

$$v_2 = v_1 + a_1 t_2 + \frac{3a_{23}}{t_2} \quad a_2 = a_1 + \frac{6a_{23}}{t_2^2} \quad (4.3.97)$$

$$h_3(t) = a_{33} t^3 + \left[ \frac{a_2 t_3^2}{2} \right] t^2 + v_2 t_3 t + \theta_2 \quad (4.3.98)$$

$$\theta_3 = \theta_2 + v_2 t_3 + \frac{a_2 t_3^2}{2} + a_{33} \quad (4.3.99)$$

$$v_3 = v_2 + a_2 t_3 + \frac{3a_{33}}{t_3} \quad a_3 = a_2 + \frac{6a_{33}}{t_3^2} \quad (4.3.100)$$

$$h_4(t) = a_{43} t^3 + \left[ \frac{a_3 t_4^2}{2} \right] t^2 + (v_3 t_4) t + \theta_3 \quad (4.3.101)$$

$$h_n(t) = \left[ \delta_n - v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^3 + (-3\delta_n + 3v_f t_n - a_f t_n^2) t^2 \quad (4.3.102)$$

$$+ \left[ 3\delta_n - 2v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t + \theta_4$$

$$v_4 = \frac{3\delta_n}{t_n} - 2v_f + \frac{a_f t_n}{2} \quad a_4 = \frac{-6\delta_n}{t_n^2} + \frac{6v_f}{t_n} - 2a_f \quad (4.3.103)$$

$$a_{23} = t_2^2 \frac{x_1}{D} \quad a_{33} = t_3^2 \frac{x_2}{D} \quad a_{43} = t_4^2 \frac{x_3}{D} \quad (4.3.104)$$

con:

$$x_1 = k_1(u - t_2) + k_2(t_4^2 - d) - k_3[(u - t_4)d + t_4^2(t_4 - t_2)] \quad (4.3.105)$$

$$x_2 = -k_1(u + t_3) + k_2(c - t_4^2) + k_3[(u - t_4)c + t_4^2(u - t_2)] \quad (4.3.106)$$

$$x_3 = k_1(u - t_4) + k_2(d - c) + k_3[(t_4 - t_2)c - d(u - t_2)] \quad (4.3.107)$$

$$D = u(u - t_2)(u - t_4) \quad (4.3.108)$$

$$u = t_2 + t_3 + t_4 \quad (4.3.109)$$

$$k_1 = \theta_4 - \theta_1 - v_1 u - a_1 \frac{u^2}{2} \quad (4.3.110)$$

$$k_2 = \frac{v_4 - v_1 - a_1 u - (a_4 - a_1)u/2}{3} \quad (4.3.111)$$

$$k_3 = \frac{a_4 - a_1}{6} \quad (4.3.112)$$

$$c = 3u^2 - 3ut_2 + t_2^2 \quad (4.3.113)$$

$$d = 3t_4^2 + 3t_3 t_4 + t_3^2 \quad (4.3.114)$$

In tal modo, è stato dimostrato che, date le posizioni iniziale, di sollevamento, di deposizione e finale, e il tempo per percorrere ciascuna traiettoria ( $t_i$ ), le equazioni polinomiali 5-cubiche possono essere determinate univocamente per soddisfare tutti i vincoli di posizione e le condizioni di continuità. Ciò che abbiamo appena trattato è l'uso di un polinomio 5-cubico per tracciare una traiettoria del giunto con sei punti di interpolazione. Nel Paragrafo 4.4.3 sarà proposto un approccio di carattere più generale per trovare i polinomi cubici per  $n$  punti di interpolazione.

#### 4.4 PIANIFICAZIONE CARTESIANA DELLE TRAIETTORIE

Nell'ultimo paragrafo abbiamo descritto le funzioni polinomiali di basso grado per generare punti della traiettoria interpolata dai giunti per il controllo di un manipolatore. Sebbene le coordinate del giunto del manipolatore specificano esaurientemente la posizione e l'orientamento della mano, esse non sono utilizzabili per specificare un compito perché la maggior parte delle coordinate dei giunti dei manipolatori non è ortogonale e non permette di distinguere posizione da orientamento. Per un sistema robotico più sofisticato, sono stati sviluppati linguaggi di programmazione per il controllo di un manipolatore perché attui una determinata funzione. In questi sistemi, un compito è indicato da una sequenza di punti nodali



cartesiani attraverso i quali deve passare la mano o l'estremità dell'effettore. Perciò, descrivendo il movimento del manipolatore durante l'effettuazione di un lavoro, siamo più interessati al formalismo della descrizione delle posizioni del bersaglio verso le quali deve muoversi la mano, e ci interessa anche la curva nello spazio (o percorso) che essa attraversa. Paul [1979] descrive il progetto di percorsi cartesiani del manipolatore che consistono in segmenti rettilinei di movimento della mano. Velocità e accelerazione della mano tra questi segmenti sono controllate convertendole in coordinate dei giunti e rese uniformi con una routine di interpolazione quadratica. Taylor [1979] ha esteso e perfezionato il metodo di Paul facendo uso dei quaternioni per descrivere lo stato della mano. Per le proprietà dei quaternioni, i passaggi tra i vari stati della mano dovuti alle operazioni di rotazione richiedono meno calcoli, mentre le operazioni di traslazione non offrono vantaggi. Nei prossimi due paragrafi esamineremo i loro apporti nella progettazione di percorsi rettilinei cartesiani.

#### 4.4.1 METODO DELLA MATRICE DI TRASFORMAZIONE OMOGENEA

In un sistema robotico programmabile, il movimento desiderato può essere specificato sotto forma di sequenze di punti nodali cartesiani, ognuno dei quali può essere descritto in termini di trasformazioni omogenee che mettono in relazione il sistema di coordinate della mano del manipolatore con il sistema di coordinate dello spazio di lavoro. Le corrispondenti coordinate dei giunti in questi punti nodali possono essere calcolate mediante la routine di soluzione cinematica inversa e, per arrotondare la traiettoria fra due punti nodali consecutivi nelle coordinate dei giunti per ragioni relative al controllo, si può usare un polinomio quadratico. In questo modo, si fa muovere la mano lungo il segmento di retta che congiunge questi due punti. Questa tecnica presenta il vantaggio di consentire il controllo della mano per seguire oggetti in movimento. Sebbene le posizioni del bersaglio siano descritte avvalendosi di trasformate, non viene specificato come si debba muovere la mano da una trasformata all'altra. Paul [1979] per ottenere il movimento tra due punti nodali cartesiani consecutivi ha usato una traslazione rettilinea e due rotazioni. La prima rotazione si effettua intorno a un vettore  $\mathbf{k}$  e ha lo scopo di allineare l'attrezzo, o estremità dell'effettore, all'angolo di approccio desiderato e la seconda rotazione allinea l'orientamento dell'attrezzo intorno al proprio asse. In generale, le posizioni del bersaglio del manipolatore possono essere espresse nella seguente equazione matriciale fondamentale:

$${}^0\mathbf{T}_6 ({}^6\mathbf{T}_{\text{tool}})_N = {}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t) \text{base} \mathbf{P}_{\text{obj}} \quad (4.4.1)$$

dove

${}^0\mathbf{T}_6$  = matrice di trasformazione omogenea  $4 \times 4$  che descrive la posizione e l'orientamento della mano rispetto al sistema di coordinate fondamentale.

${}^6\mathbf{T}_{\text{tool}}$  = matrice di trasformazione omogenea  $4 \times 4$  che descrive posizione e orientamento dell'attrezzo in relazione al sistema di coordinate della mano. Essa rappresenta il punto finale dell'attrezzo il cui movimento deve essere controllato.

${}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t)$  = matrice di trasformazione omogenea  $4 \times 4$  in funzione del tempo che rappresenta il sistema di coordinate di lavoro dell'oggetto rispetto al sistema di coordinate della base.

$\text{base} \mathbf{P}_{\text{obj}}$  = matrice di trasformazione omogenea  $4 \times 4$  che rappresenta posizione e orientamento desiderati della presa dell'oggetto da parte dell'estremità dell'effettore rispetto al sistema di coordinate di lavoro.

Se la  ${}^6\mathbf{T}_{\text{tool}}$  viene combinata con  ${}^0\mathbf{T}_6$  per costituire la matrice del braccio, allora  ${}^0\mathbf{T}_{\text{tool}}$  è una matrice identità  $4 \times 4$  e può essere omessa. Se il sistema di coordinate di lavoro è lo stesso del sistema di coordinate della base, allora  ${}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t)$  è una matrice identità  $4 \times 4$  per ogni istante di tempo.

Osservando la (4.4.1), si può notare che le matrici sul lato sinistro descrivono la posizione e l'orientamento della presa, mentre il lato destro illustra posizione e orientamento dell'oggetto nel punto in cui vogliamo che l'attrezzo lo afferi. In questo modo, per prendere l'oggetto in modo corretto e secondo il desiderio dell'operatore possiamo ricavare  ${}^0\mathbf{T}_6$  che descrive la configurazione del manipolatore:

$${}^0\mathbf{T}_6 = {}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t) \text{base} \mathbf{P}_{\text{obj}} [{}^6\mathbf{T}_{\text{tool}}]^{-1} \quad (4.4.2)$$

Se  ${}^0\mathbf{T}_6$  fosse valutata a un ritmo sufficientemente elevato e convertita nei corrispondenti angoli dei giunti, il manipolatore potrebbe essere asservito allo scopo di seguire la traiettoria.

Utilizzando la (4.4.1), una sequenza di  $N$  posizioni del bersaglio che definiscono un lavoro può essere espressa nella:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_6 ({}^6\mathbf{T}_{\text{tool}})_1 &= [{}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t)]_1 ({}^{\text{base}}\mathbf{P}_{\text{obj}})_1 \\ {}^0\mathbf{T}_6 ({}^6\mathbf{T}_{\text{tool}})_2 &= [{}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t)]_2 ({}^{\text{base}}\mathbf{P}_{\text{obj}})_2 \\ &\vdots \\ {}^0\mathbf{T}_6 ({}^6\mathbf{T}_{\text{tool}})_N &= [{}^0\mathbf{C}_{\text{base}}(t)]_N ({}^{\text{base}}\mathbf{P}_{\text{obj}})_N \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Semplificando la notazione in esponenti e deponenti dell'equazione precedente, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_6^{\text{tool}} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{C}_1(t) \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{T}_6^{\text{tool}} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{C}_2(t) \mathbf{P}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{T}_6^{\text{tool}} \mathbf{T}_N &= \mathbf{C}_N(t) \mathbf{P}_N \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Dalle posizioni definite da  $\mathbf{C}_i(t) \mathbf{P}_i$  possiamo ottenere la distanza tra punti consecutivi, e se forniamo ulteriormente velocità angolari e lineari, avremo il tempo necessario  $T_i$  per spostarsi dalla posizione  $i$  alla posizione  $i+1$ . Dato che gli attrezzi e i sistemi di coordinate mobili sono specificati rispetto al sistema di coordinate fondamentale, per lo spostamento da una posizione alla successiva è più opportuno specificare sia le posizioni sia gli attrezzi rispetto alla posizione che si intende raggiungere. Si ha così il vantaggio che l'attrezzo sembra essere in quiete visto dal sistema di coordinate mobile. Perciò, è necessario definire nuovamente la posizione attuale e gli attrezzi rispetto al sistema di coordinate successivo. Ciò può essere facilmente ottenuto ridefinendo la trasformata  $\mathbf{P}_i$  usando la notazione a due deponenti  $\mathbf{P}_{ij}$  che indica la posizione  $\mathbf{P}_j$  espressa rispetto al sistema di coordinate  $j$ -esimo. Così, se il manipolatore deve essere controllato dalla posizione 1 alla 2, esprimendolo in relazione al proprio sistema di coordinate, abbiamo:

$$\mathbf{T}_6^{\text{tool}} \mathbf{T}_1 = \mathbf{C}_1(t) \mathbf{P}_{11} \quad (4.4.5)$$

ed esprimendolo rispetto alla posizione 2 nel sistema di coordinate, si ottiene:

$$\mathbf{T}_6^{\text{tool}} \mathbf{T}_2 = \mathbf{C}_2(t) \mathbf{P}_{22} \quad (4.4.6)$$

Possiamo avere ora  $\mathbf{P}_{12}$  da queste equazioni:

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{C}_2^{-1}(t) \mathbf{C}_1(t) \mathbf{P}_{11} (\text{tool} \mathbf{T}_1)^{-1} \text{tool} \mathbf{T}_2 \quad (4.4.7)$$

Lo scopo delle equazioni precedenti è trovare  $\mathbf{P}_{12}$  dato  $\mathbf{P}_{11}$ . In questo modo, il movimento tra qualunque coppia di posizioni consecutive  $i$  e  $i+1$  può essere considerato come uno spostamento da:

$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{C}_{i+1}(t) \mathbf{P}_{i,i+1} (\text{tool} \mathbf{T}_{i+1})^{-1} \quad (4.4.8)$$

$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{C}_{i+1}(t) \mathbf{P}_{i+1,i+1} (\text{tool} \mathbf{T}_{i+1})^{-1} \quad (4.4.9)$$

dove  $\mathbf{P}_{i,i+1}$  e  $\mathbf{P}_{i+1,i+1}$  rappresentano le trasformate di cui si è detto in precedenza. Paul [1979] ha usato un metodo semplice per il controllo della mano del manipolatore nei suoi spostamenti da una trasformata all'altra: il metodo comprende una traslazione e una rotazione intorno a un asse stabilito nello spazio accoppiate a una seconda rotazione intorno all'asse dell'attrezzo per produrre il moto della mano del manipolatore controllato in velocità lineare e angolare. La prima rotazione ha lo scopo di allineare l'attrezzo alla direzione di avvicinamento richiesta, mentre la seconda rotazione serve ad allineare il vettore orientamento dell'attrezzo intorno all'asse dell'attrezzo.

Il moto dalla posizione  $i$  alla  $i+1$  può essere espresso in termini di trasformata "guida",  $\mathbf{D}(\lambda)$ , che è in funzione del tempo normalizzato  $\lambda$ , come:

$$\mathbf{T}_6(\lambda) = \mathbf{C}_{i+1}(\lambda) \mathbf{P}_{i,i+1} \mathbf{D}(\lambda) (\text{tool} \mathbf{T}_{i+1})^{-1} \quad (4.4.10)$$

dove

- $\lambda = t/T$ ,  $\lambda \in [0, 1]$
- $t$  = tempo reale dall'inizio del moto
- $T$  = tempo complessivo per percorrere questo segmento.

Nella posizione  $i$ , il tempo reale è zero,  $\lambda$  è zero,  $\mathbf{D}(0)$  è una matrice identità  $4 \times 4$ , e

$$\mathbf{P}_{i+1,i+1} = \mathbf{P}_{i,i+1} \mathbf{D}(1) \quad (4.4.11)$$

che dà:

$$\mathbf{D}(1) = (\mathbf{P}_{i,i+1})^{-1} \mathbf{P}_{i+1,i+1} \quad (4.4.12)$$

Esprimendo le posizioni  $i$  e  $i+1$  nelle loro rispettive matrici di trasformazione omogenee, abbiamo:

$$\mathbf{P}_{i,i+1} \triangleq \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_A & \mathbf{s}_A & \mathbf{a}_A & \mathbf{p}_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^A & s_x^A & a_x^A & p_x^A \\ n_y^A & s_y^A & a_y^A & p_y^A \\ n_z^A & s_z^A & a_z^A & p_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

$$e \mathbf{P}_{i+1,i+1} \triangleq \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_B & \mathbf{s}_B & \mathbf{a}_B & \mathbf{p}_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^B & s_x^B & a_x^B & p_x^B \\ n_y^B & s_y^B & a_y^B & p_y^B \\ n_z^B & s_z^B & a_z^B & p_z^B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.14)$$

Utilizzando la (2.2.27) per invertire  $\mathbf{P}_{i,i+1}$  e moltiplicando per  $\mathbf{P}_{i+1,i+1}$ , otteniamo:

$$\mathbf{D}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B & \mathbf{n}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B & \mathbf{s}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{n}_B & \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{s}_B & \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B & \mathbf{a}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.15)$$

dove il punto indica il prodotto scalare di due vettori. Se la funzione guida consiste in un movimento di traslazione e in due movimenti rotazionali, allora sia le traslazioni sia le rotazioni saranno direttamente proporzionali a  $\lambda$ . Se  $\lambda$  varia linearmente col tempo, allora il movimento risultante rappresentato da  $\mathbf{D}(\lambda)$  corrisponderà a una velocità lineare costante e a due velocità angolari. Il movimento di traslazione può essere rappresentato da una matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{L}(\lambda)$  e il movimento avverrà lungo la linea retta che unisce  $\mathbf{P}_i$  e  $\mathbf{P}_{i+1}$ . Il primo movimento rotazionale può essere rappresentato da una matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{R}_A(\lambda)$  e ha lo scopo di ruotare il vettore di avvicinamento da  $\mathbf{P}_i$  al vettore di avvicinamento in  $\mathbf{P}_{i+1}$ . Il secondo movimento rotazionale rappresentato da  $\mathbf{R}_B(\lambda)$  ha lo scopo di ruotare il vettore di orientamento da  $\mathbf{P}_i$  nel vettore di orientamento in  $\mathbf{P}_{i+1}$  intorno all'asse dell'attrezzo.

Così, la funzione guida può essere rappresentata da:

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda) \mathbf{R}_A(\lambda) \mathbf{R}_B(\lambda) \quad (4.4.16)$$

dove

$$\mathbf{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.17)$$

$$\mathbf{R}_A(\lambda) = \begin{bmatrix} S^2 \psi V(\lambda \theta) + C(\lambda \theta) & -S \psi C \psi V(\lambda \theta) & C \psi S(\lambda \theta) & 0 \\ -S \psi C \psi V(\lambda \theta) & C^2 \psi V(\lambda \theta) + C(\lambda \theta) & S \psi S(\lambda \theta) & 0 \\ -C \psi S(\lambda \theta) & -S \psi S(\lambda \theta) & C(\lambda \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.18)$$

$$\mathbf{R}_B(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda \phi) & -S(\lambda \phi) & 0 & 0 \\ S(\lambda \phi) & C(\lambda \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.19)$$

dove

$$\begin{aligned} V(\lambda \theta) &= 1 - \cos(\lambda \theta) \\ C(\lambda \theta) &= \cos(\lambda \theta) & S(\lambda \theta) &= \sin(\lambda \theta) \\ C(\lambda \phi) &= \cos(\lambda \phi) & S(\lambda \phi) &= \sin(\lambda \phi) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

e  $\lambda \in [0, 1]$ . La matrice di rotazione  $\mathbf{R}_A(\lambda)$  indica una rotazione di angolo  $\theta$  intorno al vettore di orientamento di  $\mathbf{P}_i$  che è ruotato di un angolo  $\psi$  intorno al vettore di avvicinamento.  $\mathbf{R}_B(\lambda)$  rappresenta una rotazione di  $\phi$  intorno al vettore di avvicinamento dell'attrezzo in  $\mathbf{P}_{i+1}$ . Moltiplicando tra loro le matrici delle equazioni da (4.4.17) a (4.4.19), abbiamo:

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}n & \mathbf{d}o & \mathbf{d}a & \mathbf{d}p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.21)$$

dove:

$$\mathbf{do} = \begin{bmatrix} -S(\lambda\phi)[S^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)] + C(\lambda\phi)[-S\psi C\psi V(\lambda\theta)] \\ -S(\lambda\phi)[-S\psi C\psi V(\lambda\theta)] + C(\lambda\theta)[C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)] \\ -S(\lambda\phi)[-C\psi S(\lambda\theta)] + C(\lambda\theta)[-S\psi S(\lambda\theta)] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{da} = \begin{bmatrix} C\psi S(\lambda\theta) \\ S\psi S(\lambda\theta) \\ C(\lambda\theta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{dp} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{dn} = \mathbf{do} \times \mathbf{da}$

Applicando la tecnica della trasformata inversa alla (4.4.16), possiamo risolvere rispetto a  $x, y, z$  postmoltiplicando la (4.4.16) per  $\mathbf{R}_B^{-1}(\lambda) \mathbf{R}_A^{-1}(\lambda)$  ed eguagliando gli elementi del vettore posizione:

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{n}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ y &= \mathbf{s}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ z &= \mathbf{a}_A \cdot (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Postmoltiplicando entrambi i membri della (4.4.16) per  $\mathbf{R}_B^{-1}(\lambda)$  e quindi premoltiplicando per  $\mathbf{L}^{-1}(\lambda)$ , possiamo risolvere per  $\theta$  e  $\psi$  uguagliando gli elementi della terza colonna con gli elementi della terza colonna della (4.4.16):

$$\psi = \tan^{-1} \left[ \frac{\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B}{\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B} \right] - \pi \leq \psi < \pi \quad (4.4.23)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{[(\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{a}_B)^2 + (\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{a}_B)^2]^{1/2}}{\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B} \right\} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.4.24)$$

Per trovare  $\phi$ , premoltiplichiamo i due membri della (4.4.16) per  $\mathbf{L}^{-1}(\lambda)$  e quindi per  $\mathbf{R}_A^{-1}(\lambda)$  ed eguagliamo gli elementi per ottenere:

$$\begin{aligned} S\phi &= -S\psi C\psi V(\lambda\theta)(\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_B) + [C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)](\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}_B) \\ &\quad - S\psi S(\lambda\theta)(\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{n}_B) \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

$$\begin{aligned} e \quad C\phi &= -S\psi C\psi V(\lambda\theta)(\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{s}_B) + [C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)](\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_B) \\ &\quad - S\psi S(\lambda\theta)(\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{s}_B) \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

quindi:

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{S\phi}{C\phi} \right] \quad -\pi \leq \phi < \pi \quad (4.4.27)$$

**Transizione tra due segmenti del percorso.** Molto spesso, un manipolatore deve spostarsi su segmenti rettilinei consecutivi per soddisfare la specifica di un movimento o per evitare ostacoli. Per evitare discontinuità nella velocità all'estremità di ogni segmento, dobbiamo accelerare o decelerare il moto da un segmento all'altro. Ciò può essere fatto cominciando con una variazione della velocità di  $\tau$  unità di tempo prima che il manipolatore raggiunga un punto finale e mantenendo costante l'accelerazione per  $\tau$  unità di tempo nel nuovo segmento di moto (vedi Figura 4.5). Se l'accelerazione è mantenuta a un valore costante per ogni variabile da  $-\tau$  a  $\tau$ , allora l'accelerazione necessaria a cambiare posizione e velocità è:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2\tau^2} \left[ \Delta \mathbf{C} \frac{t}{\tau} + \Delta \mathbf{B} \right] \quad (4.4.28)$$

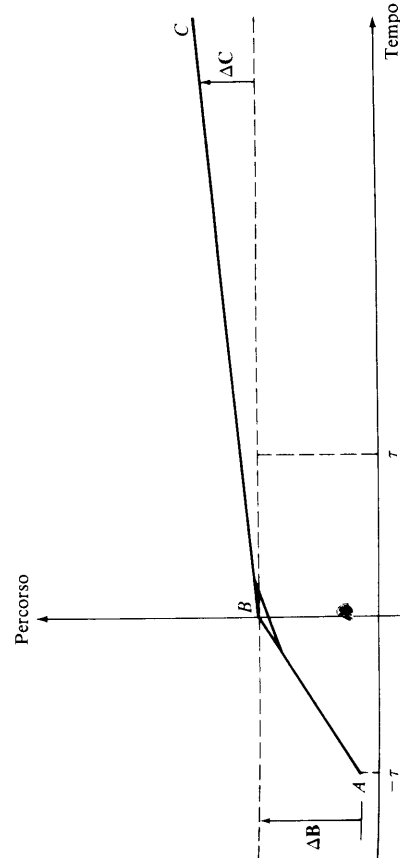


Figura 4.5 Transizione rettilinea tra due segmenti.



dove  $-\tau < t < T$  e

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_{BC} \\ y_{BC} \\ z_{BC} \\ \theta_{BC} \\ \phi_{BC} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{BA} \\ y_{BA} \\ z_{BA} \\ \theta_{BA} \\ \phi_{BA} \end{bmatrix}$$

dove  $\Delta \mathbf{C}$  e  $\Delta \mathbf{B}$  sono vettori i cui elementi rappresentano distanze e angoli cartesiani rispettivamente dai punti  $B$  a  $C$  e dai punti  $B$  ad  $A$ .

Dalla (4.4.28), velocità e posizione per  $-\tau < t < T$  sono date dalle:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{\tau} \left[ \Delta \mathbf{C} \frac{\tau}{T} + \Delta \mathbf{B} \right] \lambda - \frac{\Delta \mathbf{B}}{\tau} \quad (4.4.29)$$

$$\mathbf{q}(t) = \left[ \left[ \Delta \mathbf{C} \frac{\tau}{T} + \Delta \mathbf{B} \right] \lambda - 2 \Delta \mathbf{B} \right] \lambda + \Delta \mathbf{B} \quad (4.4.30)$$

dove

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \lambda \triangleq \frac{t + \tau}{2\tau} \quad (4.4.31)$$

Per  $\tau < t < T$ , il moto è descritto da:

$$\mathbf{q} = \Delta \mathbf{C} \lambda \quad \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.4.32)$$

dove

$$\lambda \triangleq \frac{t}{T}$$

Va notato che, come prima,  $\lambda$  rappresenta il tempo normalizzato nel range  $[0, 1]$ . Il lettore dovrà comunque tenere presente che i fattori della normalizzazione differiscono di solito per intervalli di tempo diversi.

Per il moto da  $A$  a  $B$  e a  $C$ , definiamo  $\psi$  una interpolazione lineare tra i movimenti per  $-\tau < t < \tau$  come:

$$\psi = (\psi_{BC} - \psi_{AB}) \lambda + \psi_{AB} \quad (4.4.33)$$

dove  $\psi_{AB}$  e  $\psi_{BC}$  sono definiti, rispettivamente, per il moto da  $A$  a  $B$  e da  $B$  a  $C$ , come nella (4.4.23). Quindi,  $\psi$  cambierà da  $\psi_{AB}$  a  $\psi_{BC}$ .

Riassumendo, per spostarsi da una posizione  $\mathbf{P}_i$  a una posizione  $\mathbf{P}_{i+1}$ , la funzione guida  $\mathbf{D}(\lambda)$  è calcolata utilizzando le equazioni da (4.4.16) a (4.4.27); allora  $\mathbf{T}_6(\lambda)$  può essere valutata grazie alla (4.4.10) e i corrispondenti valori dei giunti possono essere calcolati dalla routine per la cinematica inversa. Se necessario, si possono usare funzioni polinomiali quadratiche per interpolare fra i punti ottenuti dalla routine cinematica inversa.

**ESEMPIO 4.1** A un robot viene richiesto di muoversi di moto rettilineo per inserire un bullone in uno dei fori nel tassello mostrato nella Figura 4.6. Scrivete tutte le relazioni necessarie fra le equazioni matriciali, come dalla trattazione precedente, in modo che il robot possa muoversi lungo le linee tratteggiate e portare a termine il lavoro.

**SOLUZIONE** Siano  $\mathbf{P}_i$  i punti nodali cartesiani che deve attraversare la mano del manipolatore ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ). Allora le equazioni matriciali principali sono:

$$\mathbf{P}_0: \quad [\text{BASE}] [\text{T6}] [\mathbf{E}] = [\text{INIT}] [\mathbf{P}_0] \quad (4.4.34)$$

$$\mathbf{P}_1: \quad [\text{BASE}] [\text{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{B0}] [\mathbf{P}_1] \quad (4.4.35)$$

$$\mathbf{P}_2: \quad [\text{BASE}] [\text{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{B0}] [\mathbf{P}_2] \quad (4.4.36)$$

$$\mathbf{P}_3: \quad [\text{BASE}] [\text{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{B0}] [\mathbf{P}_3] \quad (4.4.37)$$

$$\mathbf{P}_4: \quad [\text{BASE}] [\text{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{BR}] [\mathbf{P}_4] \quad (4.4.38)$$

$$\mathbf{P}_5: \quad [\text{BASE}] [\text{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{BR}] [\mathbf{P}_5] \quad (4.4.39)$$

ultime decadi. Noi faremo uso dei quaternioni per semplificare la rappresentazione dell'orientamento della mano del manipolatore allo scopo di pianificare una traiettoria rettilinea. Un quaternione è una quadrupla di numeri reali ordinati,  $s, a, b, c$  associati, rispettivamente, a quattro unità: il numero reale  $+1$ , e altre tre unità  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , aventi permutazione ciclica:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1 \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k} & \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} & \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} \\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k} & \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} & \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Le unità  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  di un quaternione possono essere interpretate come i tre vettori fondamentali di un insieme di assi cartesiani. Così, un quaternione  $Q$  può essere scritto con una parte scalare  $s$  e una parte vettoriale  $\mathbf{v}$ :

$$Q = [s + \mathbf{v}] = s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = (s, a, b, c) \quad (4.4.44)$$

Sono fondamentali le seguenti proprietà dell'algebra dei quaternioni:

$$\begin{aligned} \text{Parte scalare di } Q: & \quad s \\ \text{Parte vettoriale di } Q: & \quad a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \\ \text{Coniugato di } Q: & \quad s - (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \\ \text{Norma di } Q: & \quad s^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ \text{Reciproco di } Q: & \quad \frac{s + (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} \\ \text{Quaternione unitario:} & \quad s + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}, \text{ dove } s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{aligned}$$

È importante notare che i quaternioni comprendono i numeri reali  $(s, 0, 0, 0)$  in una singola unità  $1$ , i numeri complessi  $(s, a, 0, 0)$  in due unità,  $1$  e  $\mathbf{i}$ , e i vettori  $(0, a, b, c)$  in uno spazio tridimensionale. L'addizione (sottrazione) di due quaternioni equivale all'addizione (sottrazione) degli elementi corrispondenti nelle quadruple. La moltiplicazione di due quaternioni può essere scritta come:

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (s_1 + a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k})(s_2 + a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) \\ &= (s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2 + s_2 v_1 + s_1 v_2 + v_1 \times v_2) \quad (4.4.45) \end{aligned}$$

ed è ottenuta distribuendo i termini sulla destra come nell'algebra usuale, con l'eccezione che deve essere salvaguardato l'ordine delle unità. In generale, il prodotto di due vettori in uno spazio tridimensionale, espresso in quaternioni, non è un vettore bensì un quaternione. Cioè,  $Q_1 = [0 + \mathbf{v}_1] = (0, a_1, b_1, c_1)$  e  $Q_2 = [0 + \mathbf{v}_2] = (0, a_2, b_2, c_2)$  e dalla (4.4.45):

$$Q_1 Q_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

Con l'ausilio dell'algebra dei quaternioni, le rotazioni finite nello spazio possono essere trattate in modo semplice ed efficace. Se usiamo la notazione:

$$S = \sin \left[ \frac{\theta}{2} \right] \quad \text{e} \quad C = \cos \left[ \frac{\theta}{2} \right]$$

allora possiamo rappresentare una rotazione  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta)$  di angolo  $\theta$  intorno a un asse  $\mathbf{n}$  avvalendoci di un quaternione,

$$\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta) = \left[ \cos \left[ \frac{\theta}{2} \right] + \sin \left[ \frac{\theta}{2} \right] \mathbf{n} \right] \quad (4.4.46)$$

**ESEMPIO 4.2** Una rotazione di  $90^\circ$  intorno a  $\mathbf{k}$  seguita da una rotazione di  $90^\circ$  intorno a  $\mathbf{j}$  è rappresentata dal prodotto di quaternioni

$$\begin{aligned} (\cos 45^\circ + \mathbf{j} \sin 45^\circ)(\cos 45^\circ + \mathbf{k} \sin 45^\circ) &= \left( \frac{1}{2} + \mathbf{j} \frac{1}{2} + \mathbf{k} \frac{1}{2} + \mathbf{i} \frac{1}{2} \right) \\ &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \left[ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \right] \\ &= \text{Rot} \left[ \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}, 120^\circ \right] \end{aligned}$$

La rotazione risultante è di  $120^\circ$  intorno a un asse ugualmente inclinato rispetto agli assi  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . È da notare che potremmo rappresentare le rota-

zioni intorno agli assi  $j$  e  $k$  utilizzando le matrici di rotazione trattate nel Capitolo 2. Comunque, il quaternion consente una rappresentazione molto più semplice. Così, si può cambiare la rappresentazione da quaternione a matrice o viceversa.

Per il seguito di questo paragrafo, le rotazioni finite saranno rappresentate in quaternioni come  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta) = [\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{n}]$  per una rotazione di angolo  $\theta$  intorno a un asse  $\mathbf{n}$ . La Tabella 4.5 confronta il costo computazionale di alcune operazioni di rotazione comuni, utilizzando rappresentazioni che si avvalgono di quaternioni e matrici.

**Metodo per il controllo del percorso cartesiano.** Si richiede il movimento del sistema di coordinate della mano lungo un percorso rettilineo tra due punti nodali specificati da  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{F}_1$  nel tempo  $T$ , in cui ogni sistema di coordinate è rappresentato da una matrice di trasformazione omogenea,

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il moto lungo il percorso consiste nella traslazione dell'origine del sistema di coordinate dell'attrezzo da  $\mathbf{p}_0$  a  $\mathbf{p}_1$ , unitamente alla rotazione del sistema dell'attrezzo da  $\mathbf{R}_0$  a  $\mathbf{R}_1$ . Sia  $\lambda(t)$  la frazione restante del moto che deve ancora essere effettuato all'istante  $t$ . Quindi per un moto uniforme, abbiamo:

$$\lambda(t) = \frac{T-t}{T} \tag{4.4.47}$$

Tabella 4.5 Costo computazionale con l'uso di quaternioni e matrici.

| Operazione  | Rappresentazione con quaternioni | Rappresentazione con matrici     |
|---|----------------------------------|----------------------------------|
| $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$                             | 9 addizioni, 16 moltiplicazioni  | 15 addizioni, 24 moltiplicazioni |
| $\mathbf{R}^v$  | 12 addizioni, 22 moltiplicazioni | 6 addizioni, 9 moltiplicazioni   |
| $\mathbf{R} \rightarrow \text{Rot}(\mathbf{n}, \theta)$ | 4 moltiplicazioni,               | 8 addizioni, 10 moltiplicazioni, |
|   | 1 radice quadrata,               | 2 radici quadrate,               |
|   | 1 arcotangente                   | 1 arcotangente                   |

dove  $T$  è il tempo totale necessario a percorrere il segmento, e  $t$  è il tempo da quando si inizia a percorrere il segmento. Posizione e orientamento del sistema di coordinate dell'attrezzo all'istante  $t$  sono date, rispettivamente, da:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 - \lambda(t)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \tag{4.4.48}$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 \text{Rot}[\mathbf{n}, -\theta \lambda(t)] \tag{4.4.49}$$

dove  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta)$  è una rotazione  $\theta$  intorno a un asse  $\mathbf{n}$  per riorientare  $\mathbf{R}_0$  in  $\mathbf{R}_1$ ,

$$\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta) = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_1 \tag{4.4.50}$$

dove  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta)$  rappresenta la rotazione risultante da  $\mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_1$  in forma di quaternione. Vale la pena di notare che  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$  nella (4.4.48) e  $\mathbf{n}$  e  $\theta$  nella (4.4.49) devono essere valutati solo una volta per segmento se il sistema  $\mathbf{F}_1$  è fisso. D'altra parte, se il punto di arrivo viene cambiato, allora  $\mathbf{F}_1$  varierà anch'esso. In questo caso,  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\theta$  dovrebbero essere valutati passo per passo. Ciò può essere fatto con il metodo di inseguimento descritto da Taylor [1979].

Se alla mano si richiede di spostarsi da un segmento all'altro mantenendo accelerazione costante, allora essa deve accelerare o decelerare da un segmento al successivo. Per raggiungere questo obiettivo, la transizione deve iniziare  $\tau$  tempo prima che il manipolatore raggiunga l'intersezione dei due segmenti e completare il passaggio al nuovo segmento nel tempo  $\tau$  dopo che sia avvenuta l'intersezione con il nuovo segmento. Da queste esigenze, le condizioni al contorno per la transizione fra segmenti sono:

$$\mathbf{p}(T_1 - \tau) = \mathbf{p}_1 - \frac{\tau \Delta \mathbf{p}_1}{T_1} \tag{4.4.51}$$

$$\mathbf{p}(T_1 + \tau) = \mathbf{p}_1 + \frac{\tau \Delta \mathbf{p}_2}{T_2} \tag{4.4.52}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) |_{t=T_1-\tau} = \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{T_1} \tag{4.4.53}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) |_{t=T_1+\tau} = \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{T_2} \tag{4.4.54}$$

dove  $\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ ,  $\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ , e  $T_1$  e  $T_2$  sono i tempi necessari a percorrere i due segmenti. Se applichiamo un'accelerazione costante alla transizione,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_p \quad (4.4.55)$$

integrando poi l'equazione precedente due volte e applicando le condizioni agli estremi si ottiene l'equazione della posizione del sistema di coordinate dell'attrezzo,

$$\mathbf{p}(t') = \mathbf{p}_1 - \frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \Delta \mathbf{p}_1 + \frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \Delta \mathbf{p}_2 \quad (4.4.56)$$

dove  $t' = T_1 - t$  è il tempo dalla intersezione di due segmenti. In modo simile, l'equazione di orientamento del sistema di coordinate dell'attrezzo si ottiene da:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 \text{Rot} \left[ \mathbf{n}_1, -\frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \theta_1 \right] \text{Rot} \left[ \mathbf{n}_2, -\frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \theta_2 \right] \quad (4.4.57)$$

dove:

$$\text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_1 \quad \text{e} \quad \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2) = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2$$

Gli ultimi due termini rappresentano la relativa matrice di rotazione in forma di quaternione. Le equazioni precedenti per posizione e orientamento del sistema di coordinate dell'attrezzo lungo il percorso rettilineo producono un passaggio uniforme tra i due segmenti. È utile sottolineare che l'accelerazione angolare non sarà costante a meno che gli assi  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  non siano paralleli o che una delle velocità di rotazione

$$\phi_1 = \frac{\theta_1}{T_1} \quad \text{o} \quad \phi_2 = \frac{\theta_2}{T_2}$$

sia zero.

**Deviazione limitata del percorso del giunto.** Il metodo del controllo del percorso cartesiano precedentemente descritto richiede un tempo di calcolo considerevole, ed è difficile trattare i vincoli sul comportamento del manipolatore nello spazio delle variabili dei giunti in tempo reale. Si possono trovare molti modi possibili per affrontare il problema: per esempio, si potrebbe precalcolare e memorizzare la soluzione dei giunti simulando l'algoritmo del tempo reale prima dell'esecuzione del movimento. Allora l'attuazione del movimento sarebbe banale perché i punti intermedi potrebbero

essere velocemente letti dalla memoria. Un altro metodo possibile è precalcolare la soluzione dei giunti per ogni  $n$ -esimo intervallo di campionamento e quindi effettuare un'interpolazione dei giunti utilizzando polinomi di grado basso per passare dall'uno all'altro di questi punti intermedi e generare poi le relative posizioni dei servocomandi. La difficoltà di questo metodo è che il numero dei punti intermedi richiesti per tenere la mano accettabilmente vicina al percorso rettilineo cartesiano dipende dal particolare movimento che si sta eseguendo. Ogni intervallo predeterminato sufficientemente piccolo da garantire leggere deviazioni richiederebbe un inutile aumento del tempo di precalcolo e di occupazione di memoria. Per questo, Taylor [1979] ha proposto una strategia del moto nello spazio dei giunti chiamata *deviazione limitata del percorso del giunto*, che seleziona un numero sufficiente di punti intermedi durante la fase di pre-pianificazione per garantire che la deviazione della mano del manipolatore dal percorso rettilineo cartesiano su ciascun segmento di movimento si mantenga entro limiti di errore prefissati.

Il procedimento inizia pre-calcolando tutti i vettori soluzione dei giunti  $\mathbf{q}_i$  corrispondenti ai punti nodali  $\mathbf{F}_i$  sul percorso rettilineo cartesiano desiderato. I vettori nello spazio dei giunti  $\mathbf{q}_i$  vengono quindi usati come punti nodali per una strategia di interpolazione nello spazio delle variabili dei giunti analoga a quella usata per l'equazione della posizione del percorso del controllo cartesiano. In pratica, per il moto dal punto nodale  $\mathbf{q}_0$  a  $\mathbf{q}_1$ , abbiamo:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_1 - \frac{T_1 - t}{T_1} \Delta \mathbf{q}_1 \quad (4.4.58)$$

e, per il passaggio tra  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{q}_1$  e tra  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$ , abbiamo:

$$\mathbf{q}(t') = \mathbf{q}_1 - \frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \Delta \mathbf{q}_1 + \frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \Delta \mathbf{q}_2 \quad (4.4.59)$$

dove  $\Delta \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$ ,  $\Delta \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ , e  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\tau$ , e  $t'$  hanno lo stesso significato, come si è detto prima. Le equazioni precedenti producono velocità uniformi tra i punti nodali del giunto e attuano transizioni uniformi con accelerazione costante tra i segmenti. Comunque, il sistema di coordinate dell'attrezzo può deviare notevolmente dal percorso rettilineo desiderato. L'errore di deviazione può essere osservato dalla differenza tra  $\mathbf{F}_j(t)$ , che corrisponde al sistema di coordinate della mano a livello del punto nodale dei giunti  $\mathbf{q}_j(t)$ , e  $\mathbf{F}_d(t)$ , che corrisponde al sistema di coordinate della mano nel punto nodale cartesiano  $\mathbf{F}_j(t)$ . Definendo rispettivamente le deviazioni dello spostamento e della rotazione come:



$$\delta_p = |\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_j(t)| \quad (4.4.60)$$

$$\delta_R = |\text{parte angolare di Rot}(\mathbf{n}, \phi) - \mathbf{R}_j^{-1}(t) \mathbf{R}_j(t)| \quad (4.4.61)$$

$$= |\phi|$$

e specificando le deviazioni massime,  $\delta_p^{\max}$  e  $\delta_R^{\max}$ , rispettivamente per le parti relative a spostamento e orientamento, vorremmo limitare gli errori di deviazione a:

$$\delta_p \leq \delta_p^{\max} \quad \text{e} \quad \delta_R \leq \delta_R^{\max} \quad (4.4.62)$$

Con queste limitazioni dell'errore di deviazione, dobbiamo selezionare un numero sufficiente di punti intermedi tra due punti nodali consecutivi tale che la (4.4.62) sia soddisfatta. Taylor [1979] ha presentato un percorso dei giunti a deviazione limitata che è fondamentalmente un metodo ricorsivo di bisezione per trovare i punti intermedi che soddisfino la (4.4.62). L'algoritmo converge con una certa rapidità per produrre un buon insieme di punti intermedi, anche se essi non costituiscono un insieme minimo. L'algoritmo è riportato qui di seguito.

**ALGORITMO BDJP** Dati i limiti dell'errore di deviazione massima  $\delta_p^{\max}$  e  $\delta_R^{\max}$  rispettivamente per posizione e orientamento del sistema di coordinate dell'attrezzo, e i punti nodali cartesiani  $\mathbf{F}_i$  lungo il percorso rettilineo desiderato, questo algoritmo seleziona un numero sufficiente di punti nodali tale che il sistema di coordinate della mano del manipolatore non devierà più dei limiti di errore prestabiliti lungo il percorso rettilineo voluto.

1. *Calcola la soluzione dei giunti.* Calcola i vettori  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{q}_1$  della soluzione dei giunti corrispondenti rispettivamente a  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{F}_1$ .
2. *Trova il punto medio nello spazio dei giunti.* Calcola il punto medio nello spazio delle variabili dei giunti

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_1 - 1/2\Delta\mathbf{q}_1$$

dove  $\Delta\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$  e utilizza  $\mathbf{q}_m$  per calcolare il sistema di coordinate della mano  $\mathbf{F}_m$  corrispondente ai valori del giunto  $\mathbf{q}_m$ .

3. *Trova il punto medio nello spazio cartesiano.* Calcola il corrispondente punto medio del percorso cartesiano  $\mathbf{F}_c$ :

$$\mathbf{P}_c = \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_c = \mathbf{R}_1 \text{Rot} \left[ \mathbf{n}_1, -\frac{\theta}{2} \right]$$

dove  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta) = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_1$ .

4. *Calcola l'errore di deviazione.* Calcola l'errore di deviazione tra  $\mathbf{F}_m$  e  $\mathbf{F}_c$ ,

$$\delta_p = |\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_c| \quad \delta_R = |\text{parte angolare di Rot}(\mathbf{n}, \phi) - \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{R}_m|$$

$$= |\phi|$$

5. *Verifica i limiti dell'errore.* Se  $\delta_p \leq \delta_p^{\max}$  e  $\delta_R \leq \delta_R^{\max}$ , allora si ferma. Altrimenti, calcola il vettore  $\mathbf{q}_c$  della soluzione del giunto corrispondente al punto medio  $\mathbf{F}_c$  nello spazio cartesiano, ed esegue i passi da 2 a 5 in modo ricorsivo per i due sottosegmenti sostituendo  $\mathbf{F}_1$  con  $\mathbf{F}_c$  e  $\mathbf{F}_c$  con  $\mathbf{F}_0$ .

La convergenza del precedente algoritmo è abbastanza rapida: l'errore di deviazione massima viene infatti solitamente ridotto approssimativamente di un fattore 4 per ogni iterazione. Taylor [1879] ha verificato la velocità di convergenza dell'algoritmo per un robot cilindrico (due giunti prismatici connessi da un giunto rotazionale) e ha trovato che tale velocità varia da un fattore 2 a un fattore 4 in relazione alle posizioni della mano del manipolatore.

Riassumendo, il metodo del percorso del giunto a deviazione limitata consiste in una fase di pre-pianificazione per interpolare un numero sufficiente di punti intermedi nello spazio delle variabili dei giunti in modo tale che il manipolatore possa essere guidato in tale spazio senza deviare oltre un certo limite dal percorso rettilineo desiderato.

#### 4.4.3 TRAIETTORIE DEL GIUNTO POLINOMIALI CUBICHE CON COPPIA LIMITATA

I procedimenti di Taylor per la pianificazione della traiettoria rettilinea producono i vettori nello spazio dei giunti  $\{\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)\}$  lungo il percorso cartesiano desiderato senza prendere in considerazione la dinamica del manipolatore. In realtà, l'attuatore di ciascun giunto è soggetto a saturazione e non può fornire una quantità illimitata di momenti e di forze. Così, nella pianificazione della traiettoria rettilinea devono essere presi in considerazione i vincoli dei momenti e delle forze. Ciò suggerisce che il controllo del manipolatore dovrebbe essere eseguito in due fasi successive: pianificazione fuori linea della traiettoria ottimale, seguita dal controllo in linea dell'inseguimento della traiettoria stessa. Nella pianificazione di una traiettoria rettilinea cartesiana, il percorso è vincolato alle coordinate cartesiane

mentre i momenti e le forze degli attuatori a livello di ciascun giunto sono legati alle coordinate del giunto stesso. Dunque, questo diventa un problema di ottimizzazione con vincoli misti (del percorso e dei momenti) in due differenti sistemi di coordinate. Gli approcci possibili sono due: convertire la traiettoria cartesiana in percorsi dei giunti tramite opportune funzioni di approssimazione polinomiali di basso grado e ottimizzare i percorsi dei giunti e controllare il robot a livello del giunto (Lee e Chung [1984]; oppure convertire le limitazioni di momento e forza dei giunti nei corrispondenti limiti cartesiani e ottimizzare il percorso cartesiano e il controllo del robot a livello della mano (Lee e Lee [1984]).

Sebbene implichi numerose trasformazioni non lineari tra coordinate cartesiane e dei giunti, è più semplice accostarsi al problema della pianificazione della traiettoria nello spazio delle variabili dei giunti. Lin et al. [1983] hanno proposto un insieme di funzioni spline dei giunti per collocare i segmenti tra punti nodali selezionati lungo il percorso cartesiano assegnato. Questo metodo implica la conversione del percorso cartesiano desiderato nella sua rappresentazione funzionale di  $N$  traiettorie dei giunti, una per ciascun giunto. Dato che non è nota alcuna trasformazione per descrivere il percorso rettilineo nella sua rappresentazione equivalente nello spazio delle variabili dei giunti, per approssimare il percorso cartesiano devono essere usati metodi che si adattano alla curva. Così, per approssimare un percorso cartesiano desiderato nello spazio delle variabili dei giunti, è possibile selezionare sufficienti punti nodali lungo il tracciato, e ogni segmento del percorso specificato da due punti nodali adiacenti può essere interpolato da  $N$  funzioni polinomiali dei giunti, una funzione per ogni traiettoria di giunto. Queste funzioni devono attraversare i punti nodali selezionati. Dato che le traiettorie di polinomi cubici sono uniformi e hanno piccoli sottosmorzamenti dello spostamento angolare tra due punti nodali adiacenti, Lin et al. [1983] hanno avuto l'idea di utilizzare polinomi spline cubici per definire il segmento tra due punti nodali adiacenti. Gli spostamenti dei giunti per gli  $n-2$  punti nodali selezionati sono interpolati da polinomi cubici in sequenza spezzata. Per soddisfare le condizioni di continuità per spostamento, velocità e accelerazione dei giunti sull'intero percorso cartesiano, devono essere aggiunti due ulteriori punti nodali con spostamenti del giunto non specificati per avere sufficienti gradi di libertà per la risoluzione dei polinomi cubici secondo le condizioni di continuità. Così, il numero complessivo di punti nodali diviene  $n$  e ogni traiettoria del giunto consiste di  $n-1$  polinomi cubici in sequenza spezzata. Utilizzando le condizioni di continuità, i due ulteriori punti nodali sono allora espressi come combinazione di variabili incognite e di costanti note. Allora, devono essere risolte solo  $n-2$  equazioni. L'equazione matriciale risultante ha una struttura a bande che facilita il calcolo. Dopo aver risolto l'equazione matriciale, le funzioni spli-

ne risultanti sono espresse in termini di intervalli di tempo tra nodi adiacenti. Per ridurre al minimo il tempo di attraversamento totale del percorso, questi intervalli devono essere regolati in base ai vincoli dei giunti all'interno di ognuno degli  $n-1$  polinomi cubici. Così, il problema si limita a un'ottimizzazione della riduzione massima del tempo totale di percorrenza agendo sugli intervalli di tempo.

Sia  $\mathbf{H}(t)$  il sistema di coordinate della mano espresso da una matrice di trasformazione omogenea  $4 \times 4$ . Alla mano si richiede di attraversare una sequenza di  $n$  punti nodali cartesiani,  $[\mathbf{H}(t_1), \mathbf{H}(t_2), \dots, \mathbf{H}(t_n)]$ . I corrispondenti vettori posizione dei giunti  $(q_{11}, q_{21}, \dots, q_{n1}), (q_{12}, q_{22}, \dots, q_{n2}), \dots, (q_{1n}, q_{2n}, \dots, q_{nn})$ , a livello di questi punti nodali cartesiani possono essere risolti facendo uso della routine cinematica inversa, dove  $q_{ji}$  è lo spostamento angolare del giunto  $j$  a livello dell' $i$ -esimo punto nodale corrispondente a  $\mathbf{H}_i(t)$ . Così, l'obiettivo è trovare una traiettoria polinomiale cubica per ogni giunto  $j$  che raccordi le posizioni dei giunti  $[q_{j1}(t_1), q_{j2}(t_2), \dots, q_{jn}(t_0_n)]$ , dove  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  è una sequenza ordinata di istanti che indica quando la mano deve passare attraverso questi punti nodali. Al tempo iniziale  $t = t_1$  e al tempo finale  $t = t_n$  lo spostamento, la velocità e l'accelerazione del giunto sono rispettivamente specificati come  $q_{j0}, v_{j0}, a_{j0}$ , e  $q_{jn}, v_{jn}, a_{jn}$ . Inoltre sono specificati anche gli spostamenti del giunto  $q_{j0}$  in  $t = t_k$  per  $k = 3, 4, \dots, n-2$  attraverso cui i giunti stessi devono passare. Comunque,  $q_2$  e  $q_{n-1}$  non sono specificati: si tratta dei due ulteriori punti nodali necessari per fornire i gradi di libertà occorrenti per la risoluzione dei polinomi cubici.

Sia  $Q_{ji}(t)$  la funzione polinomiale cubica spezzata per il giunto  $j$  compresa tra i punti nodali  $\mathbf{H}_i$  e  $\mathbf{H}_{i+1}$ , definita nell'intervallo di tempo  $[t_i, t_{i+1}]$ . Il problema è allora di ricordare  $Q_{ji}(t)$ , per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , così che lo spostamento richiesto, la velocità e l'accelerazione siano soddisfatti e siano continue nell'intero intervallo di tempo  $[t_1, t_n]$ . Dal momento che il polinomio  $Q_{ji}(t)$  è cubico, la sua derivata seconda rispetto al tempo  $\dot{Q}_{ji}(t)$  deve essere una funzione lineare del tempo  $t$ ,

$$Q_{ji}(t) = \frac{t_{i+1} - t_i}{u_i} \ddot{Q}_{ji}(t_i) + \frac{(t - t_i)}{u_i} \dot{Q}_{ji}(t_{i+1}) \quad (4.4.63)$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$j = 1, \dots, N$$

dove  $u_i = t_{i+1} - t_i$  è il tempo in cui viene percorso il segmento  $i$ . Integrando  $\dot{Q}_{ji}(t)$  due volte e soddisfacendo le condizioni al contorno di  $Q_{ji}(t) = q_{ji}$  e  $\dot{Q}_{ji}(t_{i+1}) = \dot{q}_{ji}$  arriviamo alle seguenti funzioni di interpolazione:

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_{ji}(t) &= \frac{\ddot{Q}_{ji}(t_1)}{6u_i}(t_1 - t)^3 + \frac{\ddot{Q}_{ji}(t_{i+1})}{6u_i}(t - t_1)^3 \\
 &+ \left[ \frac{q_{j,i+1}}{u_i} - \frac{u_i \ddot{Q}_{ji}(t_{i+1})}{6} \right] (t - t_1) \\
 &+ \left[ \frac{q_{j,i}}{u_i} - \frac{u_i \ddot{Q}_{ji}(t_1)}{6} \right] (t_{i+1} - t) \\
 & \quad i = 1, \dots, n-1 \\
 & \quad j = 1, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{4.4.64}$$

Così, per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $Q_{ji}(t)$  è determinata se  $\ddot{Q}_{ji}(t)$  e  $\ddot{Q}_{ji}(t_{i+1})$  sono note. Ciò porta a un sistema di  $n-2$  equazioni con incognite  $Q_{ji}(t_i)$  per  $i = 2, \dots, n-1$ , in cui sono note  $u_i$  per  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{b}
 \tag{4.4.65}$$

dove

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{Q}} &= \begin{bmatrix} \ddot{Q}_{j2}(t_2) \\ \ddot{Q}_{j3}(t_3) \\ \vdots \\ \ddot{Q}_{j,n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 + \frac{u_1^2}{u_2} & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 - \frac{u_1^2}{u_2} & 2(u_2 + u_3) & u_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & u_3 & 2(u_3 + u_4) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & u_4 & 2(u_4 + u_{n-3}) \cdot u_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2(u_{n-3} + u_{n-2}) & u_{n-2} - \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-2} & 3u_{n-1} + 2u_{n-2} + \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \left[ \frac{q_{j3}}{u_2} + \frac{q_{j1}}{u_1} \right] - 6 \left[ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right] \left[ q_{j1} + u_1 v_{j1} + \frac{u_1^2}{3} a_{j1} \right] - u_1 a_{j1} \\ \frac{6}{u_2} \left[ q_{j1} + u_1 v_{j1} + \frac{u_1^2}{3} a_{j1} \right] + \frac{6q_{j4}}{u_3} - 6 \left[ \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right] q_{j3} \\ 6 \left[ \frac{q_{j5} - q_{j4}}{u_4} - \frac{q_4 - q_{j3}}{u_3} \right] \\ 6 \left[ \frac{q_{j5} - q_{j4}}{u_4} - \frac{q_4 - q_{j3}}{u_3} \right] \\ \vdots \\ \frac{6}{u_{n-2}} \left[ q_{jn} - v_{jn} u_{n-1} + \frac{u_{n-1}^2}{3} a_{jn} \right] - 6 \left[ \frac{1}{u_{n-2}} + \frac{1}{u_{n-3}} \right] q_{j,n-2} + \frac{6}{u_{n-3}} q_{j,n-3} \\ - 6 \left[ \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}} \right] \left[ q_{jn} - v_{jn} u_{n-1} + \frac{u_{n-1}^2}{3} a_{jn} \right] + \frac{6q_{jn}}{u_{n-1}} + \frac{6q_{n-2}}{u_{n-1} u_{n-2}} - u_{n-1} a_{jn} \end{bmatrix}$$

La struttura a bande della matrice  $\mathbf{A}$  rende semplice la risoluzione per  $\ddot{\mathbf{Q}}$  che è sostituito nella (4.4.63) per ottenere la soluzione risultante  $Q_{ji}(t)$ . Quest'ultima è fornita in termini di intervalli di tempo  $u_i$  e nei valori dati dello spostamento, delle velocità e delle accelerazioni dei giunti. La matrice a bande precedente  $\mathbf{A}$  della (4.4.64) è sempre non singolare se gli intervalli di tempo  $u_i$  sono positivi. Così, la traiettoria del giunto nel polinomio cubico ha sempre un'unica soluzione. Dato che l'attuatore del motore di ciascun giunto è soggetto a saturazione e non può fornire un momento e una forza illimitati, il tempo complessivo necessario per il percorso specificato approssimato dai polinomi cubici è limitato dai valori massimi della velocità, accelerazione e velocità d'accelerazione di ogni giunto. Per massimizzare la velocità di attraversamento del percorso, il tempo complessivo necessario per il manipolatore deve essere minimizzato. Questo risultato può essere raggiunto agendo sugli intervalli di tempo  $u_i$  tra due punti nodali adiacenti soggetti ai vincoli di velocità, accelerazione, velocità d'accelerazione e momento. Il problema può essere allora posto in questi termini:

Minimizzare la funzione obiettivo

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \quad (4.4.66)$$

soggetta ai seguenti vincoli:

$$\text{Condizione per la velocità: } |\dot{Q}_{ji}(t)| \leq V_j \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n-1 \end{array}$$

$$\text{Condizione per l'accelerazione: } |\ddot{Q}_{ji}(t)| \leq A_j \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n-1 \end{array}$$

$$\text{Condizione della velocità d'accelerazione: } \left| \frac{d^3}{dt^3} Q_{ji}(t) \right| \leq J_j \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n-1 \end{array}$$

$$\text{Condizione del momento: } |\tau_j(t)| \leq \Gamma_j \quad j = 1, \dots, N$$

dove  $T$  è il tempo di percorrenza totale,  $V_j$ ,  $A_j$ ,  $J_j$  e  $\Gamma_j$  sono, rispettivamente, i limiti di velocità, accelerazione, velocità d'accelerazione e momento del giunto  $j$ .

Le condizioni precedenti possono essere espresse in forma esplicita come segue.

**Condizioni per la velocità.** Differenziando la (4.4.64) e sostituendo rispettivamente  $\dot{Q}_{ji}(t_i)$  e  $\dot{Q}_{ji}(t_{i+1})$  con  $\omega_{ji}$  e  $\omega_{j,i+1}$ , perveniamo alle seguenti espressioni per  $\dot{Q}_{ji}(t)$  e  $\dot{Q}_{ji}(t)$ :

$$\dot{Q}_{ji}(t) = \frac{\omega_{ji}}{2u_i}(t_{i+1} - t)^2 + \frac{\omega_{j,i+1}}{2u_i}(t - t_i)^2 + \left[ \frac{q_{j,i+1}}{u_i} - \frac{u_i \omega_{j,i+1}}{6} \right] - \left[ \frac{q_{ji}}{u_i} - \frac{u_i \omega_{ji}}{6} \right] \quad (4.4.67)$$

$$\text{e } \ddot{Q}_{ji}(t) = \frac{\omega_{j,i+1}}{u_i}(t - t_i) - \frac{\omega_{ji}}{u_i}(t - t_{i+1}) \quad (4.4.68)$$

dove  $\omega_{ji}$  è l'accelerazione in  $\mathbf{H}_i$  ed è uguale a  $\ddot{Q}_{ji}(t_i)$  se l'istante in cui  $Q_{ji}(t)$  attraversa  $\mathbf{H}_i$  è  $t_i$ . Il valore massimo assoluto della velocità si ha in  $t_i$ ,  $t_{i+1}$  o  $\bar{t}_i$ , dove  $\bar{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$  e soddisfa l'equazione  $\dot{Q}_{ji}(\bar{t}_i) = 0$ . Le condizioni per la velocità diventano allora:

$$\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\dot{Q}_{ji}| = \max [ |\dot{Q}_{ji}(t_i)|, |\dot{Q}_{ji}(t_{i+1})|, |\dot{Q}_{ji}(\bar{t}_i)| ] \leq V_j \quad (4.4.69)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

dove

$$|\dot{Q}_{ji}(t_i)| = \left| \frac{\omega_{ji}}{2} u_i + \frac{q_{j,i+1} - q_{ji}}{u_i} + \frac{(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1}) u_i}{6} \right|$$

$$|\dot{Q}_{ji}(t_{i+1})| = \left| \frac{\omega_{j,i+1}}{2} u_i + \frac{q_{j,i+1} - q_{ji}}{u_i} + \frac{(\omega_{j,i+1} - \omega_{ji}) u_i}{6} \right|$$

e

$$|\dot{Q}_{ji}(\bar{t}_i)| = \begin{cases} \left| \frac{\omega_{ji} \omega_{j,i+1} u_i}{2(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1})} + \frac{(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1}) u_i}{6} + \frac{q_{j,i+1} - q_{ji}}{u_i} \right| & \text{if } \omega_{ji} \neq \omega_{j,i+1} \text{ and } \bar{t}_i \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{if } \omega_{ji} = \omega_{j,i+1} \text{ or } \bar{t}_i \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

**Vincoli per l'accelerazione.** L'accelerazione è una funzione lineare del tempo tra due punti nodali adiacenti. Così, il massimo valore assoluto dell'accelerazione si ha in  $t_i$  o in  $t_{i+1}$  ed è uguale al massimo di  $\{ |\omega_{ji}|, |\omega_{j,i+1}| \}$ . Perciò, i vincoli dell'accelerazione diventano:

$$\max \{ |\omega_{ji}|, |\omega_{j2}|, \dots, |\omega_{jn}| \} \leq A_j \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.4.70)$$



**Vincoli della velocità d'accelerazione.** La velocità d'accelerazione è la derivata dell'accelerazione. Quindi i vincoli sono rappresentati da:

$$\left| \frac{\omega_{j,t+1} - \omega_{jt}}{u_j} \right| \leq J_j \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.4.71)$$

**Vincoli del momento.** Il momento  $\tau(t)$  può essere calcolato dalle equazioni dinamiche del moto [(3.2.25)]

$$\tau_j(t) = \sum_{k=1}^N D_{jk}(\mathbf{Q}_k(t)) \ddot{Q}_{jk}(t) + \sum_{k=1}^N h_{jkm}(\mathbf{Q}_k(t)) \dot{Q}_{ki}(t) \dot{Q}_{mi}(t) + c_j(\mathbf{Q}_j(t)) \quad (4.4.72)$$

dove

$$\mathbf{Q}_i(t) = (Q_{1i}(t), Q_{2i}(t), \dots, Q_{Ni}(t))^T \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Se non sono soddisfatti i vincoli del momento, allora deve essere eseguita dinamicamente una trasformazione di scala del tempo della traiettoria per assicurare che siano soddisfatti i vincoli del momento (Lin e Chang [1985], Hollerbach [1984]).

Con questa formulazione, l'obiettivo consiste nel trovare un algoritmo di ottimizzazione appropriato che minimizzi il tempo complessivo di attraversamento soggetto a vincoli di velocità, accelerazione, velocità d'accelerazione e di momento. Sono reperibili vari algoritmi per l'ottimizzazione: per esempio Lin et al. [1983] per ottenere un algoritmo iterativo per minimizzare il tempo di percorrenza complessivo soggetto ai vincoli delle velocità, accelerazioni, velocità d'accelerazione e momenti del giunto hanno utilizzato la ricerca del poliedro flessibile di Nelder e Mead. I risultati ottenuti dall'uso di questa tecnica di ottimizzazione possono essere trovati in Lin et al. [1983].

## 4.5 CONCLUSIONI

Sono stati trattati due approcci principali per la pianificazione della traiettoria: il metodo dell'interpolazione dei giunti e quello dello spazio cartesiano. Il primo pianifica sequenze di polinomi che producono una traiettoria uni-

forme del giunto. Per ottenere una maggior velocità di calcolo e meno movimenti estranei, si prediligono le sequenze di polinomi di più basso grado. La traiettoria del giunto è suddivisa in diversi segmenti e ciascuno di questi è costituito da polinomi in basso grado. In particolare, sono state esaminate le sequenze di polinomi 4-3-4 e 5-cubica.

Per la pianificazione nello spazio cartesiano sono stati visti in dettaglio vari metodi. Poiché l'attuazione è fatta nello spazio delle variabili dei giunti mentre il percorso è determinato in coordinate cartesiane, l'approccio più comune consiste nel pianificare il percorso rettilineo nello spazio delle variabili dei giunti facendo uso di polinomi di basso grado per approssimare il percorso. Paul [1979] per realizzare il moto rettilineo della mano ha utilizzato una traslazione e due rotazioni. Taylor [1979] ha perfezionato questa tecnica usando un quaternione per rappresentare le operazioni di rotazione. Egli ha inoltre sviluppato un procedimento di controllo della deviazione legata al giunto che comprende la selezione di più punti di interpolazione intermedi quando l'approssimazione del polinomio del giunto devia eccessivamente dal percorso rettilineo desiderato. Lin et al. [1983] per ricordare  $n$  punti di interpolazione selezionati dall'operatore sul percorso hanno utilizzato polinomi cubici del giunto. Poi, il tempo complessivo per viaggiare lungo i punti nodali viene minimizzato tenendo conto dei vincoli di velocità, accelerazione, velocità di accelerazione, e di momento dei giunti. Queste tecniche rappresentano uno spostamento dall'obiettivo della pianificazione in tempo reale a una fase di pianificazione fuori linea. In sostanza, esse scompaiono il controllo del manipolatore nella pianificazione del moto fuori linea, seguita dal controllo di inseguimento in linea, un tema che è trattato dettagliatamente nel Capitolo 5.

## BIBLIOGRAFIA

Si possono trovare ulteriori trattazioni sulle traiettorie interpolate dai giunti in Paul [1972], Lewis [1973, 1974], Brady et al. [1982], e Lee et al. [1986]. La maggior parte di queste traiettorie raramente comprende nei procedimenti di pianificazione la dinamica del manipolatore fisico e il limite di momento degli attuatori. Questi autori hanno focalizzato la necessità che le traiettorie del giunto siano uniformi e continue specificando i limiti di velocità e accelerazione lungo la traiettoria. Oltre ai vincoli della continuità, Hollerbach [1984] ha sviluppato un procedimento relativo alla trasformazione di scala in rapporto al tempo per determinare se una traiettoria pianificata è realizzabile entro i limiti della dinamica e dei momenti che dipendono dalla posizione dei giunti in un dato istante e dalla loro velocità. Il progetto del percorso di un manipolatore costituito da segmenti rettilinei

sequenziali nello spazio cartesiano è stato esaminato da Paul [1979], che si è avvalso della matrice di trasformazione omogenea per rappresentare le posizioni che devono essere raggiunte dalla mano del manipolatore. Il movimento tra due posizioni consecutive è effettuato grazie a due operazioni sequenziali: una traslazione e una rotazione per allineare il vettore di avviamento della mano e una rotazione finale intorno all'asse dell'attrezzo per allineare l'orientamento della pinza. Si usa allora una routine di interpolazione mediante un polinomio quadratico nello spazio delle variabili dei giunti per garantire una transizione uniforme tra due segmenti del percorso collegati tra loro. Taylor [1979], utilizzando la rappresentazione con quaternioni, ha ampliato il metodo di Paul per un moto migliore e più uniforme. Per raggiungere l'obiettivo della pianificazione della traiettoria in tempo reale, entrambi gli approcci tralasciano il vincolo fisico del momento del manipolatore.

Sono stati progettati altri procedimenti per la pianificazione cartesiana per soddisfare allo stesso tempo i vincoli della continuità e del momento. Per includere il vincolo del momento nello stadio di pianificazione della traiettoria, solitamente si considera che il momento massimo ammissibile sia costante per qualsiasi posizione e velocità. Per esempio, invece di usare vincoli di momento variabili, Lin et al. [1983] e Luh e Lin [1984] hanno utilizzato limiti per velocità, accelerazione e velocità d'accelerazione costanti per ogni giunto. Essi hanno selezionato diversi punti nodali sul percorso cartesiano desiderato, hanno risolto la cinematica inversa, e trovato funzioni polinomiali di basso grado sufficientemente uniformi, che garantiscono le condizioni di continuità per attraversare questi punti nodali nello spazio delle variabili dei giunti. Quindi, riducendo il tempo normalizzato al tempo degli attuatori, è stato incluso il vincolo dinamico supponendo il limite del momento costante lungo la traiettoria. A causa delle funzioni interpolate dal giunto, lo stato della mano in ogni istante di campionamento non può essere esattamente sul percorso desiderato, ma piuttosto sulle funzioni di polinomi interpolate dai giunti.

Lee [1985] ha sviluppato un metodo discreto di pianificazione della traiettoria per determinare i punti richiesti dalla traiettoria esattamente su un dato percorso rettilineo che soddisfa sia le condizioni di regolarità, sia quelle del momento. Il problema della pianificazione della traiettoria è formulato quale massimizzazione della distanza tra due punti nodali cartesiani consecutivi su un dato percorso rettilineo rispettando le condizioni di regolarità e del momento. Grazie alle approssimazioni discrete temporali di velocità, accelerazione e velocità d'accelerazione dei giunti, la soluzione dell'ottimizzazione comporta calcoli notevoli che ne impediscono utili applicazioni. Così, per ridurre il costo computazionale, l'ottimizzazione viene realizzata con algoritmi di ricerca iterativa.

## ESERCIZI

1. Si vuole che un robot rotazionale a un solo link si sposti da  $\theta(0) = 30^\circ$  a  $\theta(2) = 100^\circ$  in 2 secondi. Velocità del giunto e accelerazione sono entrambe zero nelle posizioni iniziale e finale.
  - (a) Qual è il polinomio di più alto grado che è possibile usare per effettuare lo spostamento?
  - (b) Qual è il polinomio di grado più basso che è possibile utilizzare per effettuare lo spostamento?
2. Con riferimento all'Esercizio 4.1,
  - (a) determinare i coefficienti di un polinomio cubico che effettua il movimento,
  - (b) determinare i coefficienti di un polinomio biquadrato che effettua il movimento e
  - (c) determinare i coefficienti di un polinomio di quinto grado che effettua il movimento.
 Potete ripartire la traiettoria del giunto in diversi segmenti.
3. Consideriamo il braccio del robot a due link del Paragrafo 3.2.6, e ammettiamo che ogni link sia lungo 1 m. Il braccio deve muoversi dalla posizione iniziale  $(x_0, y_0) = (1.96, 0.50)$  alla posizione finale  $(x_f, y_f) = (1.00, 0.75)$ . Velocità e accelerazione iniziali e finali sono zero. Determinare i coefficienti di un polinomio cubico per ciascun giunto perché si possa realizzare il movimento. Potete dividere la traiettoria del giunto in vari segmenti.
4. Nella pianificazione di una traiettoria 4-3-4 si rende necessario risolvere una equazione matriciale, come nella (4.3.46). Esiste sempre la matrice inversa della (4.3.46)? Motivare la risposta.
5. Dato il braccio di un robot della serie PUMA 560 il cui sistema di coordinate dei giunti è stato stabilito come nella Figura 2.11, chiediamo di progettare una traiettoria 4-3-4 per le seguenti condizioni: la posizione iniziale del braccio è espressa da una matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{T}_{\text{initial}}$ :

$$\mathbf{T}_{\text{initial}} = \begin{bmatrix} -0.660 & -0.436 & -0.612 & -184.099 \\ -0.750 & 0.433 & 0.500 & 892.250 \\ 0.047 & 0.789 & -0.612 & -34.599 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posizione finale del braccio è espressa da una matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{T}_{\text{final}}$ :

$$\mathbf{T}_{\text{final}} = \begin{bmatrix} -0.933 & -0.064 & 0.355 & 412.876 \\ -0.122 & 0.982 & -0.145 & 596.051 \\ -0.339 & -0.179 & -0.924 & -545.869 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le posizioni di sollevamento e di approccio del braccio sono ottenute da una regola empirica prendendo il 25% di  $d_6$  (il valore di  $d_6$  è 56.25 mm). Quali sono le matrici di trasformazione omogenea per le posizioni di partenza e arrivo (cioè,  $\mathbf{T}_{\text{lift-off}}$  e  $\mathbf{T}_{\text{set-down}}$ )?

6. Dato un robot della serie PUMA 560 i cui sistemi di coordinate dei giunti sono stati stabiliti come nella Figura 2.11, si richiede di progettare una traiettoria 4-3-4 per le seguenti condizioni: la posizione iniziale del braccio è espressa dalla matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{T}_{\text{initial}}$ :

$$\mathbf{T}_{\text{initial}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 600.0 \\ 0 & 0 & -1 & -100.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posizione di arrivo del braccio è espressa tramite una matrice di trasformazione omogenea  $\mathbf{T}_{\text{set-down}}$ :

$$\mathbf{T}_{\text{set-down}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 100.0 \\ 1 & 0 & 0 & 400.0 \\ 0 & 0 & -1 & -50.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Le posizioni di sollevamento e di approccio del braccio sono ottenute da una regola empirica prendendo il 25% di  $d_6$  (il valore di  $d_6$  è 56.25 mm) più le opposte rotazioni. Qual è la matrice di trasformazione omogenea nello stato di partenza (cioè,  $\mathbf{T}_{\text{lift-off}}$ ) se la mano è ruotata di  $60^\circ$  intorno all'asse  $s$  nel punto iniziale per giungere alla posizione di sollevamento?

- (b) Qual è la matrice di trasformazione omogenea per la posizione finale (cioè,  $\mathbf{T}_{\text{final}}$ ) se la mano è ruotata di  $-60^\circ$  intorno all'asse  $s$  nel punto di approccio per giungere alla posizione finale?

7. Un manipolatore deve muoversi lungo un percorso dal punto **A** al punto **B**, dove **A** e **B** sono descritti rispettivamente da:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il moto da **A** a **B** consiste in una traslazione e in due rotazioni, come è descritto nel Paragrafo 4.4.1. Determinare  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  e  $x$ ,  $y$ ,  $z$  per la trasformata guida. Trovare inoltre tre trasformate intermedie tra **A** e **B**.

8. Un manipolatore deve muoversi lungo una sequenza dal punto **A** al punto **B** ruotando a una velocità angolare costante intorno a un vettore  $\mathbf{k}$  e di un angolo  $\theta$ . I punti **A** e **B** sono dati da una matrice di trasformazione omogenea  $4 \times 4$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trovare il vettore  $\mathbf{K}$  e l'angolo  $\theta$ . Trovare inoltre tre trasformate intermedie tra **A** e **B**.

9. Esprimere i risultati della rotazione dell'Esercizio 4.8 in forma di quaternione.

10. Data una rappresentazione in quaternione per le rotazioni seguenti: una rotazione di  $60^\circ$  intorno a  $\mathbf{j}$  seguita da una rotazione di  $120^\circ$  intorno a  $\mathbf{i}$ . Trovare la rotazione risultante nella rappresentazione in quaternione.

11. Dimostrare che esiste sempre l'inverso della matrice a bande **A** nella (4.4.64).