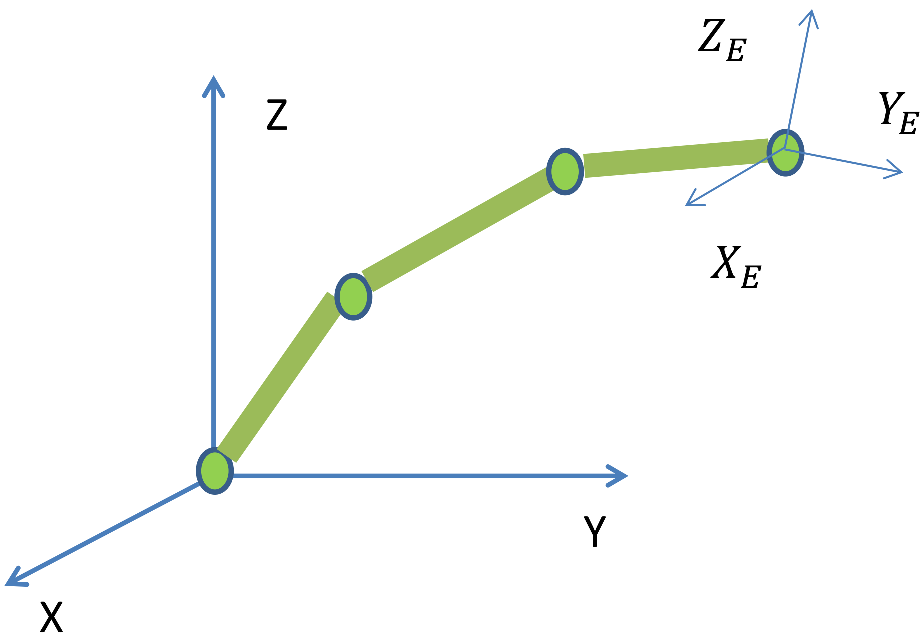
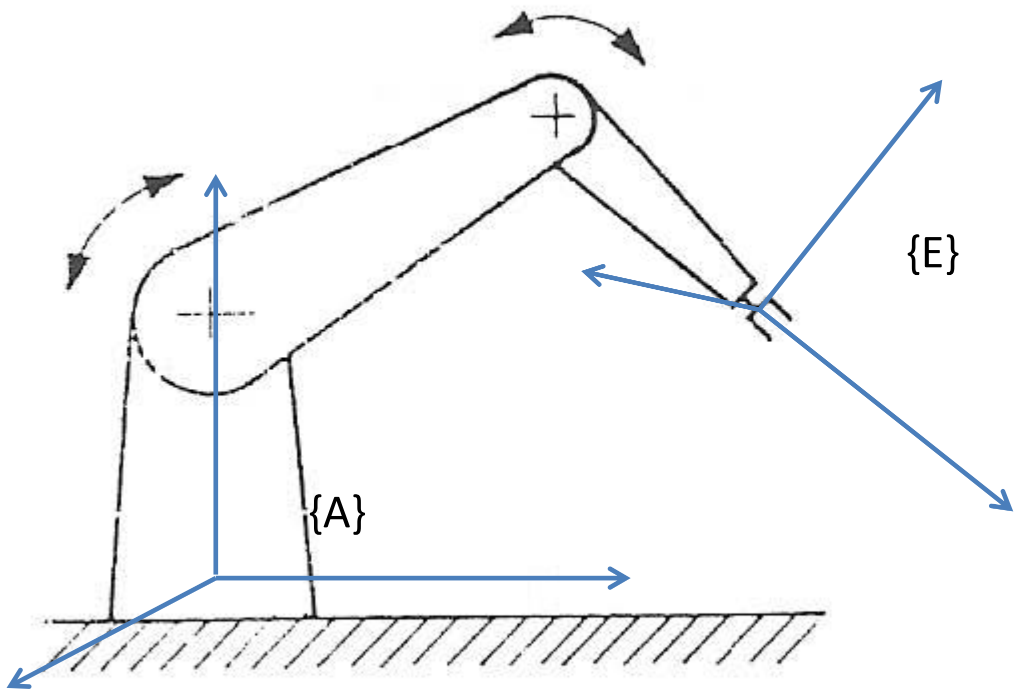
Cinematica dei robot

- Posizionare l'end effector nello spazio in una data posizione e con un dato orientamento rispetto ad un sistema di riferimento assoluto



Cinematica dei robot (II)



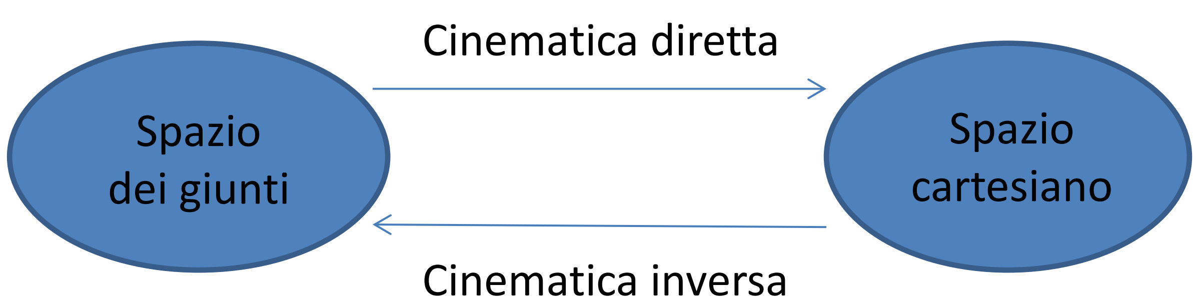
Cinematica diretta $\quad {}^{A}T_{E}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$

Cinematica inversa $\quad \theta_i = f_i\,(\mathrm{x,y,z},\alpha, \beta, \gamma)$

Spazio cartesiano e spazio dei giunti

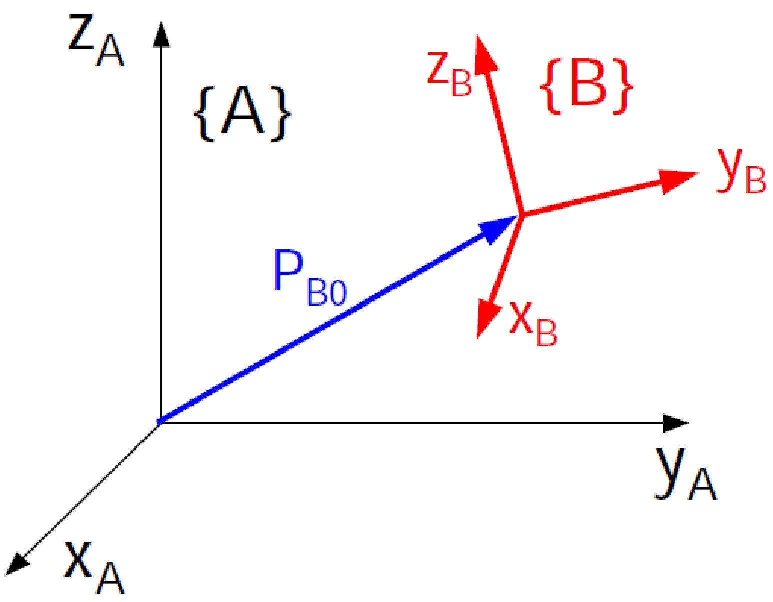
- La configurazione di un manipolatore a N gradi di libertà è descritta all'interno dei seguenti spazi di rappresentazione:

Spazio cartesiano:	P $\in \Re^6$	*Vettore che esprime posizione e orientamento dell'end effector*
Spazio dei giunti:	P $\in \Re^N$	*Vettore variabili di giunto*



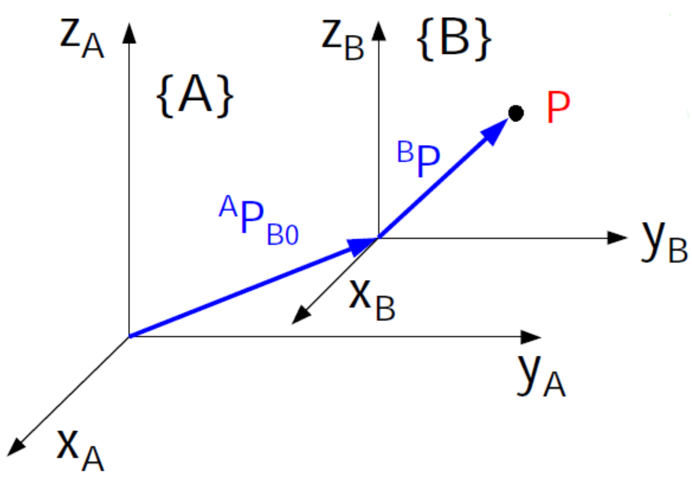
Sistemi di riferimento

Un sistema di riferimento {B} può essere descritto dalla posizione della sua origine e dalla rotazione dei suoi assi rispetto ad {A}

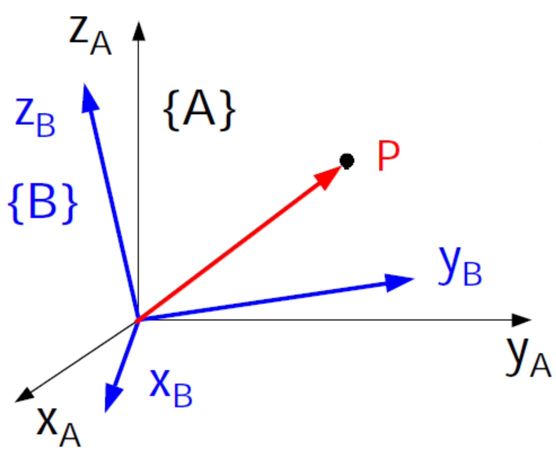


$$\{{}^{B}R_{A}, {}^{A}P_{B0}\}$$

Rotazioni e Traslazioni



$$^AP = {}^BP + {}^AP_{B0}$$



$$^AP = {}^AR_B \; {}^BP$$

Trasformazioni omogenee

- Le trasformazioni omogenee permettono di descrivere roto-traslazioni attraverso un operatore matriciale:

$$ {}^{A}P = {}^{A}R_{B}\ {}^{B}P + {}^{A}P_{B0} \quad \Longrightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}T_{B}\ {}^{B}P $$

- Nello spazio omogeneo si ha:

$$ {}^{A}P = {}^{A}T_{B}\ {}^{B}P \qquad {}^{A}T_{B} = \begin{pmatrix} {}^{A}R_{B} & | & {}^{A}P_{B0} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0\ \ 0\ \ 0 & | & 1 \end{pmatrix} $$

Trasformazioni omogenee (II)

TRASLAZIONI

$$^{A}Trasl_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

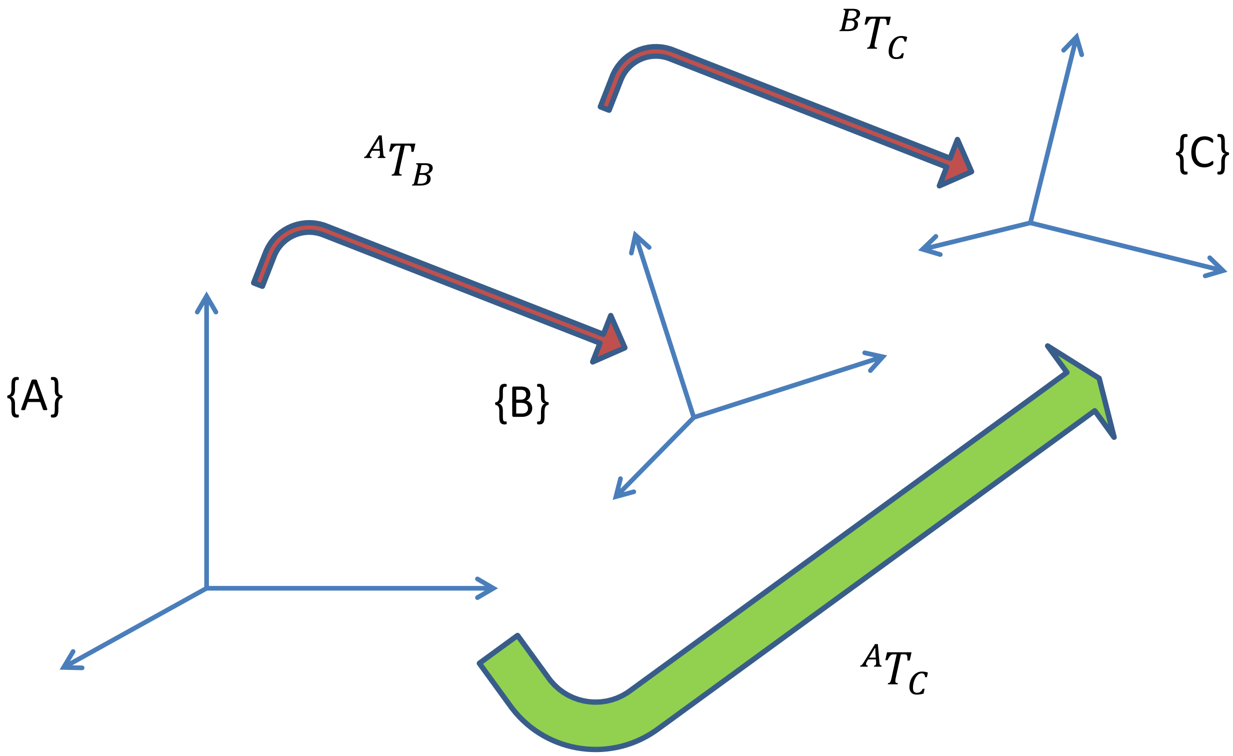
ROTAZIONI

$$^{A}Rot_{B} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ROTO-TRASLAZIONI

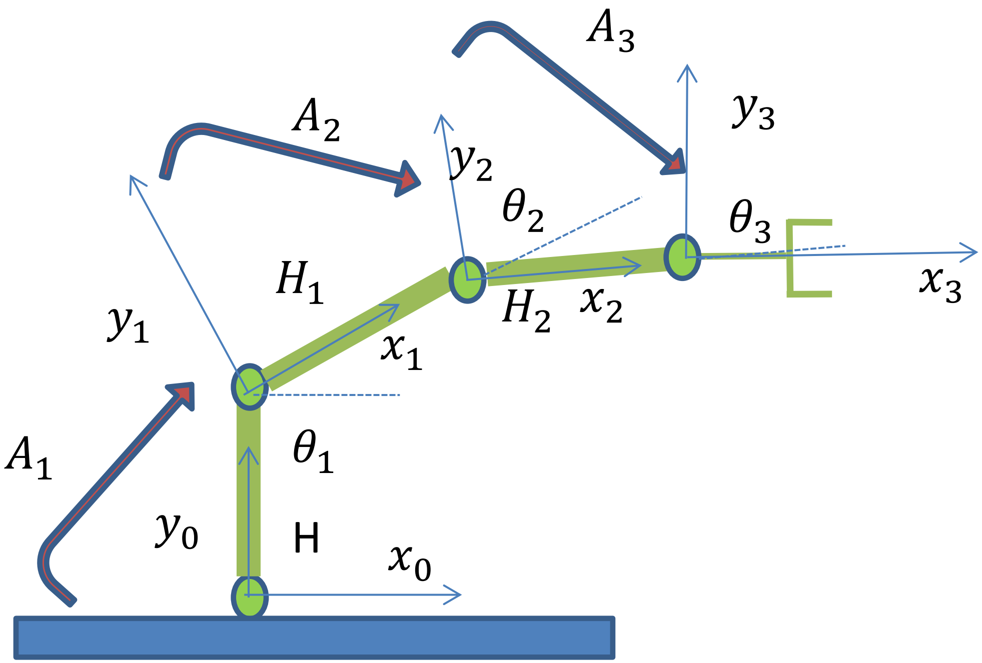
$$^{A}Rot - Trasl_{B} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trasformazioni omogenee (III)
Componibilità…



$$ {}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}T_{C} $$

Esercizio 2D



$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & \cos\theta_1 & H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -sin\theta_2 & H_1 \\ sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

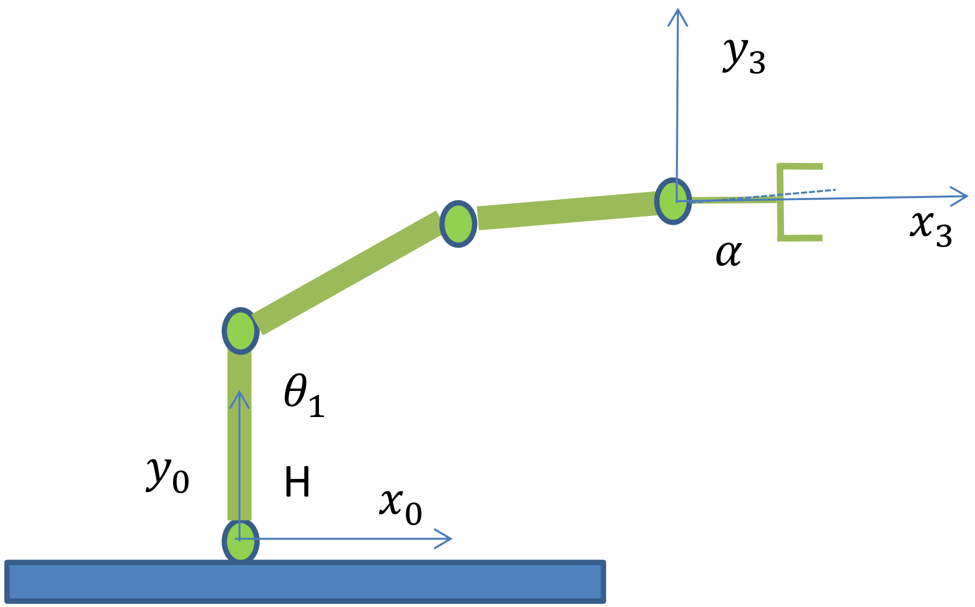
$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -sin\theta_3 & H_2 \\ sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = A_1 A_2 A_3$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2)\, H_2 + \cos(\theta_1)\, H_1 \\ sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \mathrm{H} + \sin(\theta_1 + \theta_2)\, H_2 + \sin(\theta_1)\, H_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2D - cinematica inversa

Calcolo coordinate end effector i funzione delle coordinate dei giunti
T^* è la trasformazione che descrive l'end effector



$$T^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x \\ sin\ \alpha & \cos\alpha & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eguagliando T^* e T_3 si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ x = \cos(\theta_1 + \theta_2)\, H_2 + \cos(\theta_1)\, H_1 \\ y - H = \sin(\theta_1 + \theta_2)\, H_2 + \sin(\theta_1)\, H_1 \end{cases}$$

Esercizio 2D cinematica inversa (II)

Sommando i quadrati:

$$x^2 + (y - H)^2 = H_2^2 + H_1^2 + 2H_1H_2 \cos\theta_2$$

Da questi si ricava:

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = (x^2 + (y - H)^2 - H_2^2 - H_1^2 \quad)/2H_1H_2 \\ \sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - (\cos\theta_2)^2} \end{cases}$$

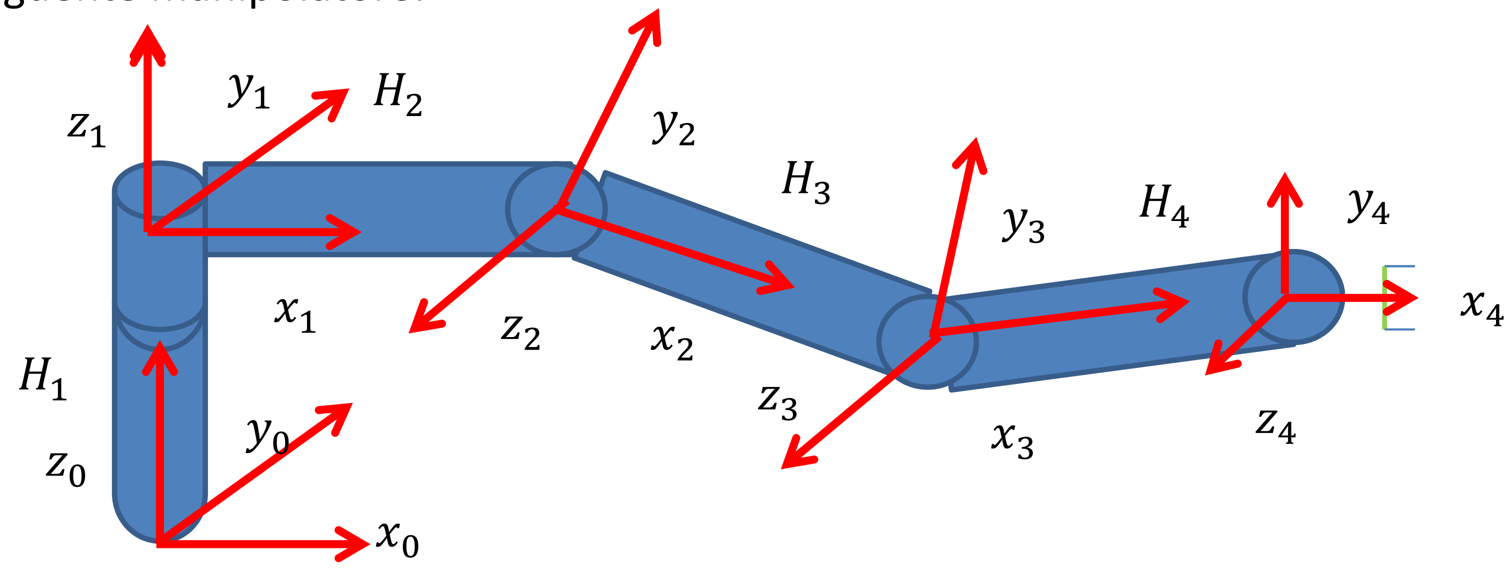
Quindi:

θ_2=atan2 $(\cos\theta_2\,, sin\theta_2)$

Conoscendo θ_2 è quindi possibile ricavare all'interno del sistema anche θ_1 e θ_3

Esercizio 3D cinematica

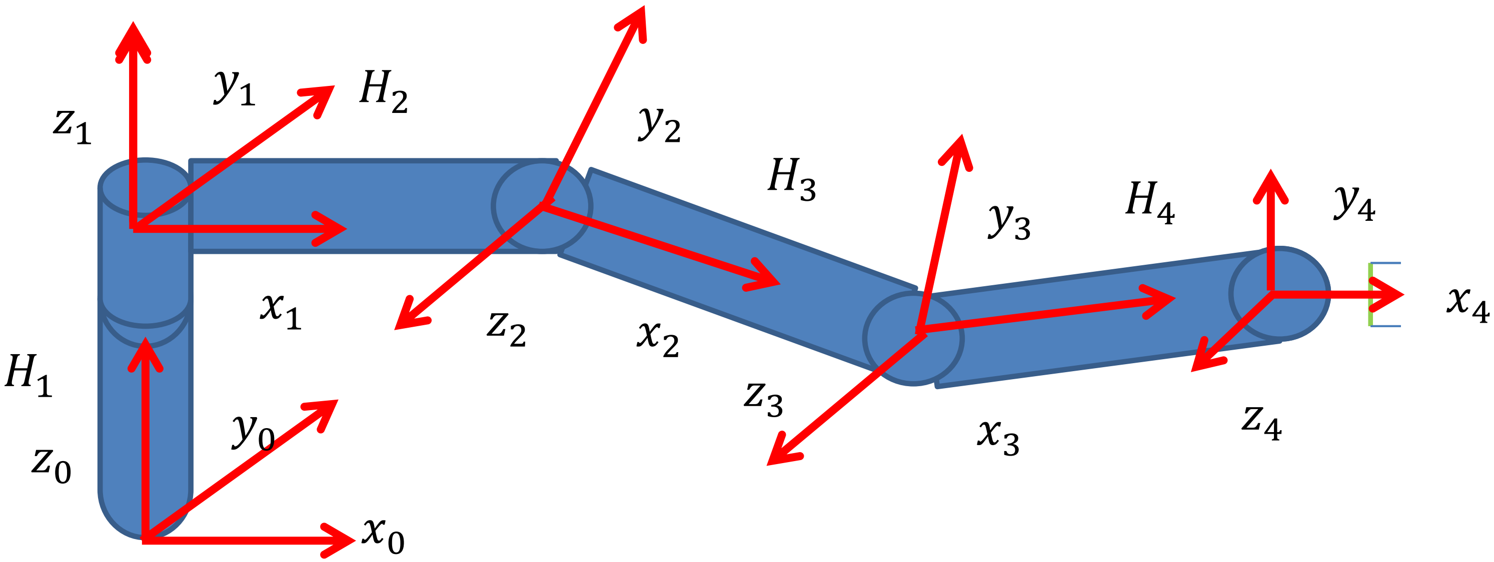
Dato il seguente manipolatore:



Calcolare matrici di trasformazione da un sistema di riferimento al successivo

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & 0 \\ sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 & H_3 \\ sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3D cinematica (II)



$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & H_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & -sin\theta_4 & 0 & H_4 \\ sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trasformazione T_4 è uguale a:

$$T_4 = A_1 A_2 A_3 A_4$$