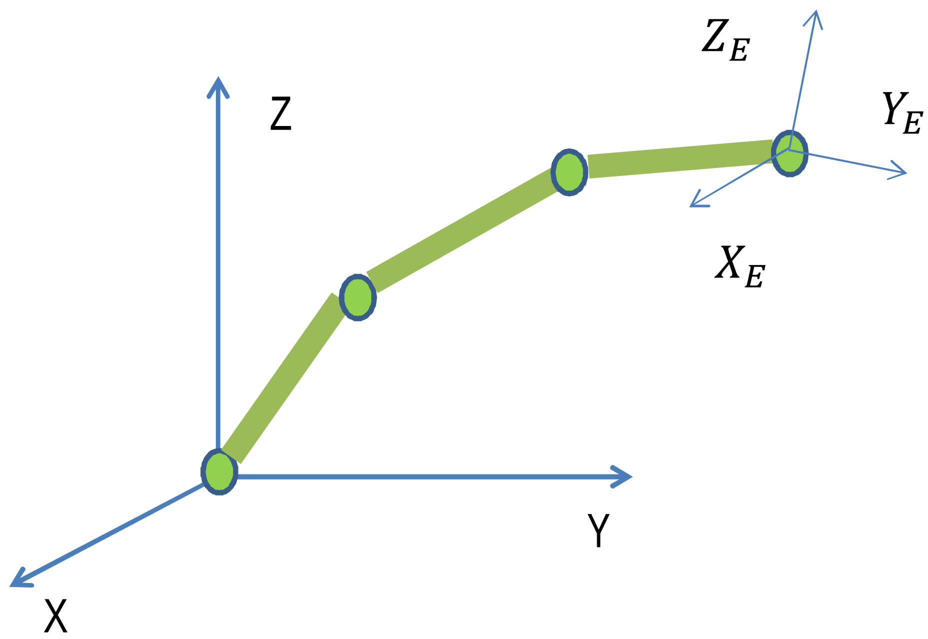
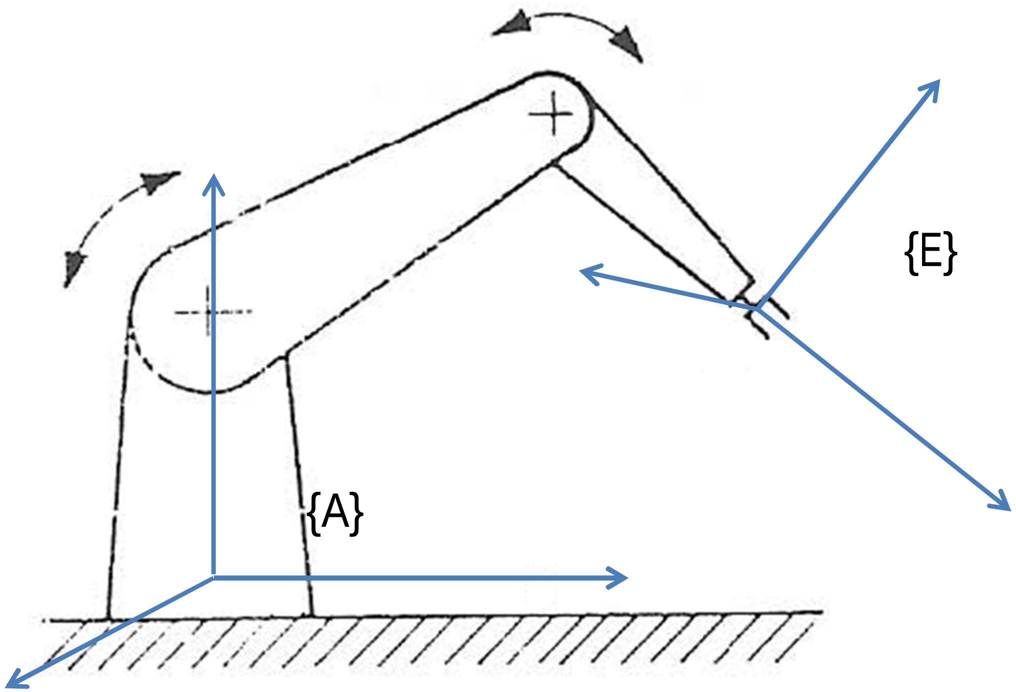
Cinematica dei robot

- Posizionare l'end effector nello spazio in una data posizione e con un dato orientamento rispetto ad un sistema di riferimento assoluto



Cinematica dei robot (II)



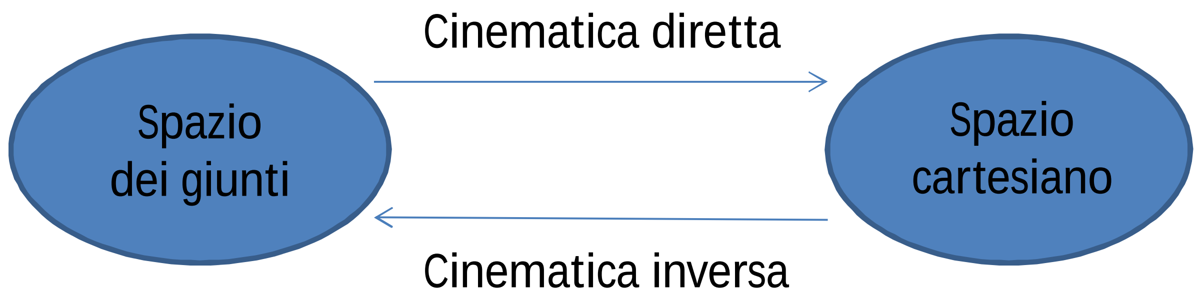
Cinematica diretta $\quad {}^{A}T_{E}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$

Cinematica inversa $\quad \theta_i = f_i\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$

Spazio cartesiano e spazio dei giunti

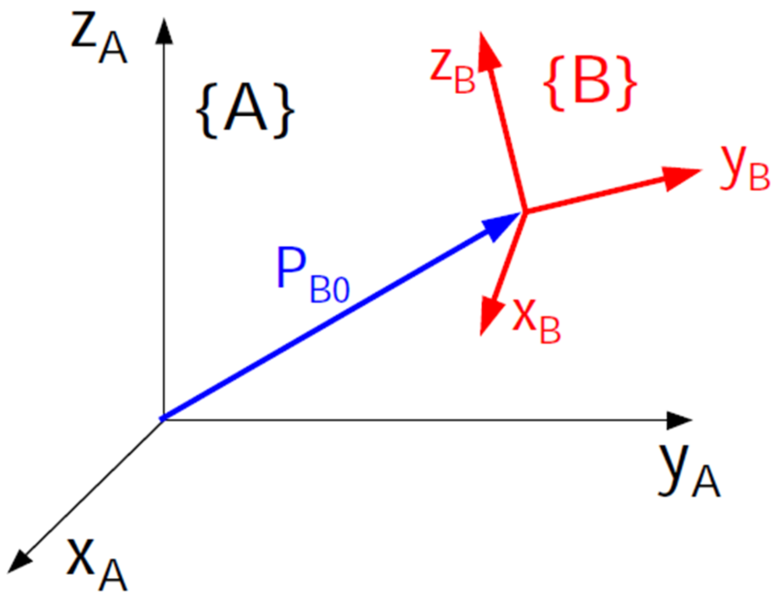
- La configurazione di un manipolatore a N gradi di libertà è descritta all’interno dei seguenti spazi di rappresentazione:

Spazio cartesiano:	$P \in \Re^6$	*Vettore che esprime posizione e orientamento dell'end effector*
Spazio dei giunti:	$P \in \Re^N$	*Vettore variabili di giunto*



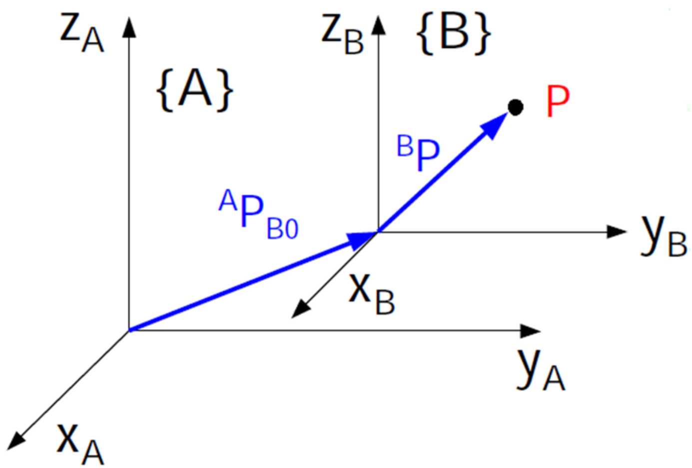
Sistemi di riferimento

Un sistema di riferimento {B} può essere descritto dalla posizione della sua origine e dalla rotazione dei suoi assi rispetto ad {A}

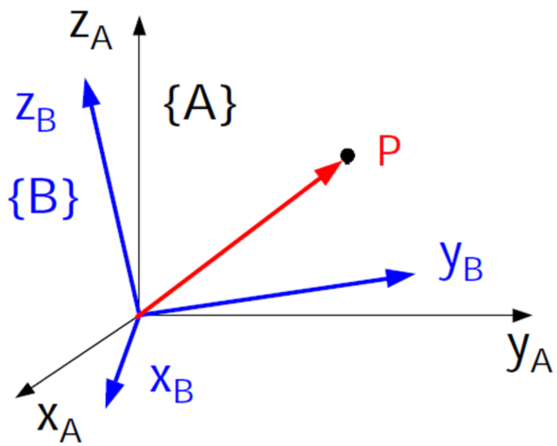


$$\{{}^{B}R_{A},\, {}^{A}P_{B0}\}$$

Rotazioni e Traslazioni



$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B0}$$



$$^{A}P = {}^{A}R_{B}\ {}^{B}P$$

Trasformazioni omogenee

- Le trasformazioni omogenee permettono di descrivere roto-traslazioni attraverso un operatore matriciale:

$$ {}^{A}P = {}^{A}R_{B}\ {}^{B}P + {}^{A}P_{B0} \quad \Longrightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}T_{B}\ {}^{B}P $$

- Nello spazio omogeneo si ha:

$$ {}^{A}P = {}^{A}T_{B}\ {}^{B}P \qquad {}^{A}T_{B} = \begin{pmatrix} {}^{A}R_{B} & | & {}^{A}P_{B0} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ 0\ 0\ 0 & | & 1 \end{pmatrix} $$

Trasformazioni omogenee (II)

TRASLAZIONI

$$ {}^{A}Trasl_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

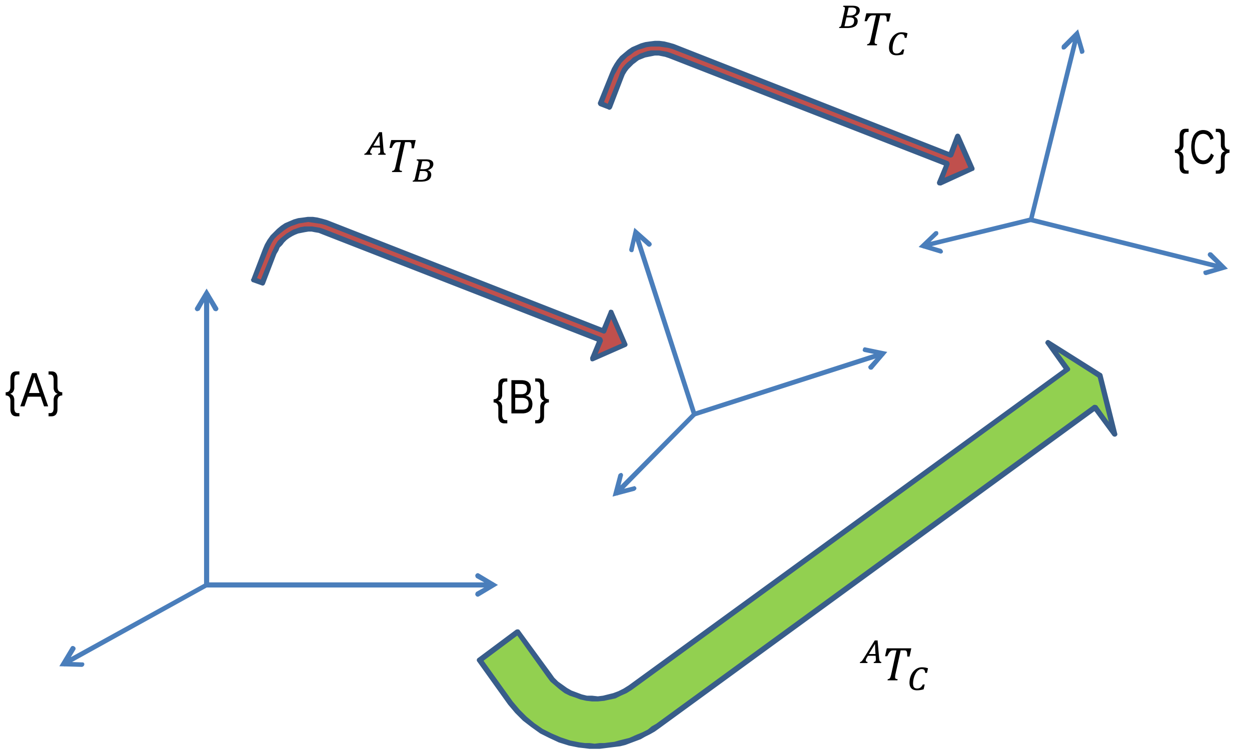
ROTAZIONI

$$ {}^{A}Rot_{B} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

ROTO-TRASLAZIONI

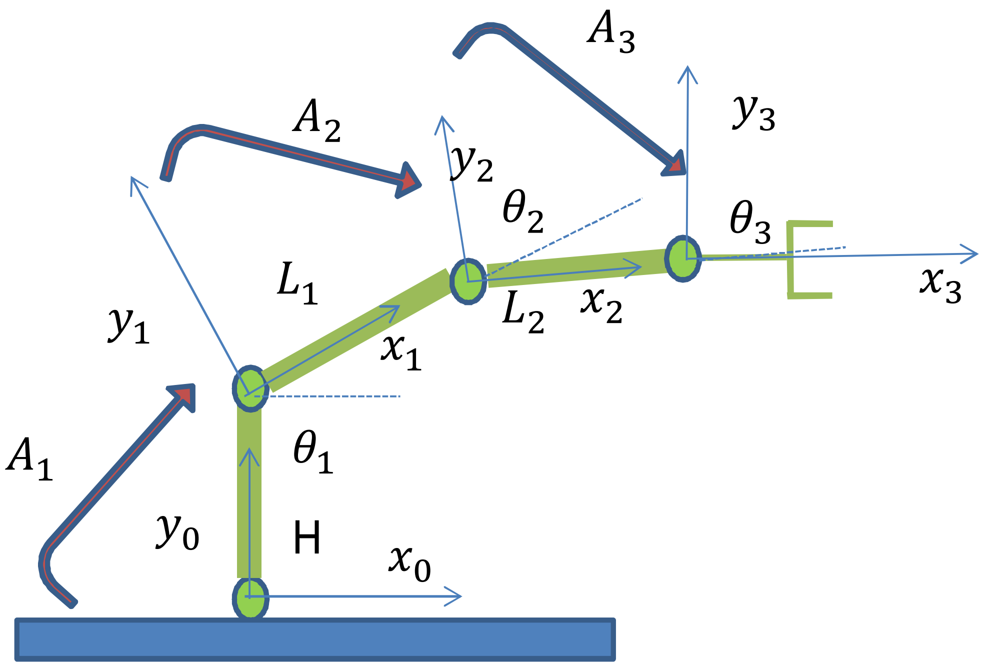
$$ {}^{A}Rot - Trasl_{B} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Trasformazioni omogenee (III)
Componibilità…



$${}^{A}T_{C} = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}T_{C}$$

Esercizio 2D



$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & \cos\theta_1 & H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -sin\theta_2 & L_1 \\ sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

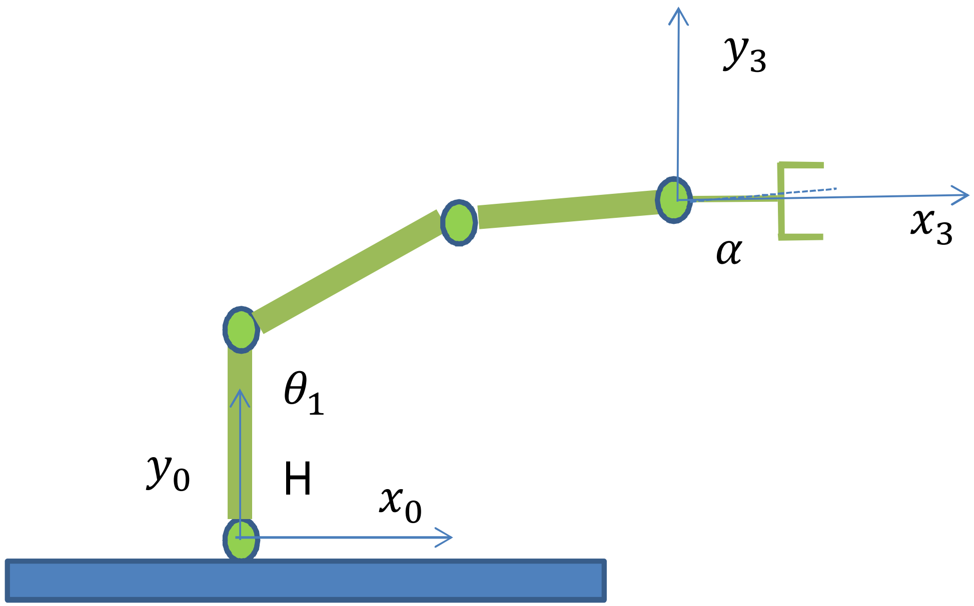
$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -sin\theta_3 & L_2 \\ sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = A_1 A_2 A_3$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2)L_2 + \cos(\theta_1)L_1 \\ sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \mathrm{H} + \sin(\theta_1 + \theta_2)L_2 + \sin(\theta_1)L_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2D - cinematica inversa

Calcolo coordinate end effector i funzione delle coordinate dei giunti
T^* è la trasformazione che descrive l'end effector



$$T^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x \\ sin\ \alpha & \cos\alpha & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eguagliando T^* e T_3 si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ x = \cos(\theta_1 + \theta_2)L_2 + \cos(\theta_1)L_1 \\ y - H = \sin(\theta_1 + \theta_2)L_2 + \sin(\theta_1)L_1 \end{cases}$$

Esercizio 2D cinematica inversa (II)

Sommando i quadrati:

$$x^2 + (y - H)^2 = L_2^2 + L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2$$

Da questi si ricava:

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = (x^2 + (y - H)^2 - L_2^2 - L_1^2 \ )/2L_1 L_2 \\ \sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - (\cos\theta_2)^2} \end{cases}$$

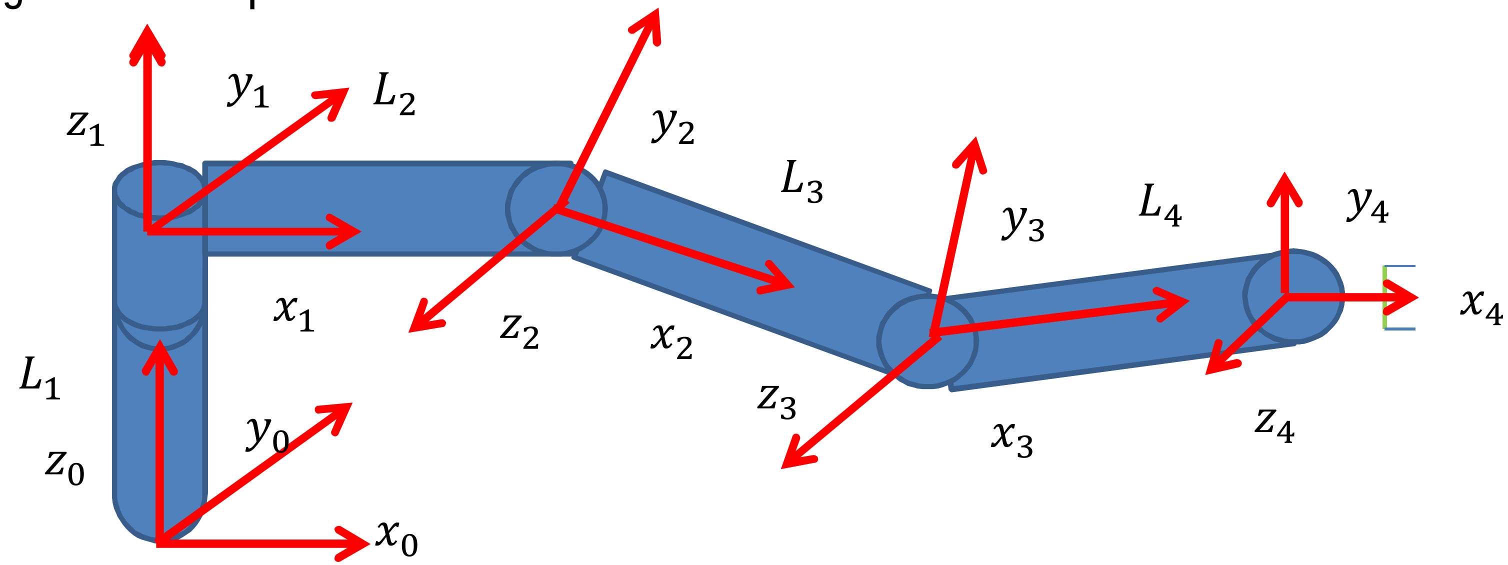
Quindi:

θ_2=atan2 ($\cos\theta_2$, $sin\theta_2$)

Conoscendo θ_2 è quindi possibile ricavare all’interno del sistema anche θ_1 e θ_3

Esercizio 3D cinematica

Dato il seguente manipolatore:

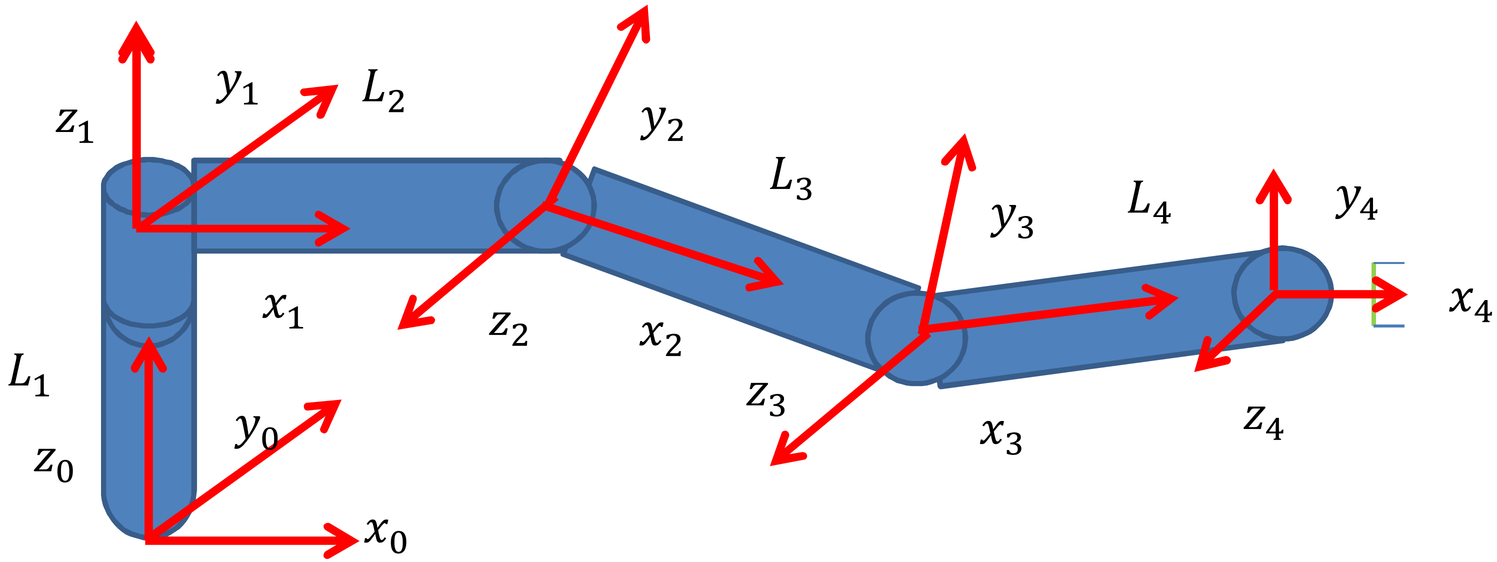


Calcolare matrici di trasformazione da un sistema di riferimento al successivo

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & 0 \\ sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 & L_3 \\ sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3D cinematica (II)



$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & -sin\theta_4 & 0 & L_4 \\ sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La trasformazione T_4 è uguale a:

$$T_4 = A_1 A_2 A_3 A_4$$

Esercizio cinematica robot cartesiano

Sia data la seguente tabella di Denavit-Hartemberg relativa ad un robot cartesiano a portale a cui è legato un polso a due gradi di libertà

J	α_i	a_i	d_i	ϑ_i
1	-90°	H_1	d_1	0
2	-90°	H_2	d_2	-90°
3	90°	0	d_3	0
4	90°	0	0	ϑ_4
5	0	0	d_5	0

Esercizio cinematica robot cartesiano (II)

Ricordando che per come è definita la procedura di Denavit-Hartenberg standard, è possibile far coincidere una terna sull'altra attraverso rotazioni e traslazioni lungo assi definiti. La matrice che permette di far coincidere due terne è la seguente:

$$T_i^{i-1} = Rot\ (x_{i-1}, \alpha_{i-1})\ Trasl(x_{i-1}, a_{i-1})\ Trasl(z_i, d_i)\mathrm{Rot}(z_i, \vartheta_i)$$

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} cos\,\theta_i & -sen\,\theta_i\,cos\,\alpha_i & sen\,\theta_i\,sen\,\alpha_i & a_i\,cos\,\theta_i \\ sen\,\theta_i & cos\,\theta_i\,cos\,\alpha_i & -cos\,\theta_i\,sen\,\alpha_i & a_i\,sen\,\theta_i \\ 0 & sen\,\alpha_i & cos\,\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio cinematica robot cartesiano (II)

- Le matrici di posizionamento sono le seguenti:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & H_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & H_2 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4^3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & 0 & sin\theta_4 & 0 \\ sin\theta_4 & 0 & -\cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_5^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice da punto finale a base:

$$T_5^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4$$