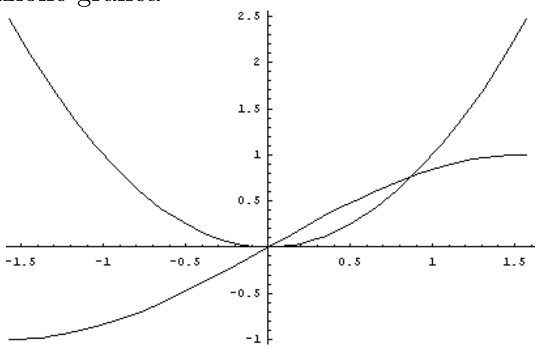
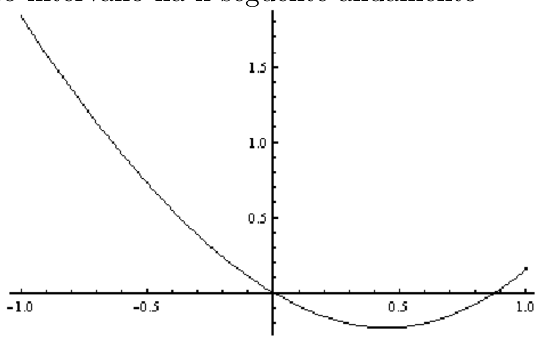
Soluzione della prova scritta
di Laboratorio di Calcolo del 7 luglio 2008

Esercizio 1

(a) Dalla separazione grafica



risultano due soluzioni α, con $0.5 < \alpha < 1$ e $\beta = 0$. Per la convergenza ad α, poiché nell'intervallo di separazione è $f'(x) = 2x - \cos x > 0$, $f''(x) = 2 - \sin x > 0$, e inoltre $f(0.5) < 0$, $f(1) > 0$, il grafico di $f(x)$ nel suddetto intervallo ha il seguente andamento



Scegliendo $x_0 = 1$ si ha convergenza monotona, perché $f(1)f''(1) > 0$. La convergenza è del secondo ordine.

Per la convergenza a β, si ha che nell'intervallo $[-1, 0)$ è $f'(x) < 0$, $f"(x) > 0$ e $f(-1)f"(-1) > 0$ e quindi si ha convergenza monotona de secondo ordine a β scegliendo $x_0 = -1$.

(b)
```
f=inline('x^2-sin(x)');
f1=inline('2*x-cos(x)');
x0=1;
f0=feval(f, x0);
x1=x0-f0/feval(f1, x0);
x2=x1-feval(f, x1)/feval(f1, x1);
```

```
x3=x2-feval(f, x2/feval(f1, x1);
```

Per la successione convergente a β basta ripetere gli stessi comandi a partire da $x_0 = -1$.

Esercizio 2

(a) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, perché A è triangolare superiore. Gli autovalori relativi a λ_1 sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi tutti i vettori della forma $k(1,\ 0)^T$. Gli autovalori relativi a λ_2 sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi tutti i vettori della forma $k(1,\ -1)^T$.

(b) Sono soddisfatte le condizioni per la convergenza poiché gli autovalori sono distinti e gli autovalori sono lineramente indipendenti.

(c) Si ha

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Per i generico si ha $x_i = (2^{i+1} - 1,\ 1)^T$. Il vettore i-esimo normalizzato è

$$\frac{x_i}{||x_i||_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/(2^{i+1} - 1) \end{pmatrix},$$

che, per $i \to \infty$, tende all'autovettore $(1,\ 0)^T$.

Esercizio 3

(a)

```
x(1)=0;
x(2:11)=1./(10:-1:1).^2;
p=polyfit(x,exp(x),10);
```

(b) Dalla formula del resto abbiamo

$$|r(x)| = \prod_{i=0}^{10}(x - x_i)\frac{e^(\xi)}{11!}.$$

Maggiorado ogni termine del prodotto abbiamo

$$|r(x)| < 1 * \prod_{j=10}^{2}(1 - \frac{1}{j^2}) * 1\frac{e}{11!} < \frac{e}{11!}.$$

(c) Posto $p(x) = \sum_{i=1}^{11} p_i x^{11-i}$ la formula richiesta è

$$\int_0^1 p(x)dx = \sum_{i=1}^{11} p_i/(12 - i)$$

(d) `integrale=sum(p./(11:-1:1));`