RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & & & 2x_2 & \leq & 8 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte.

Si indichi poi come cambierebbe la risposta finale qualora il costo di x_1 diventasse 1 e il costo di x_2 diventasse 2, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = 4,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B, \ \eta_i > 0\} = 1/2,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 3, \quad h = 2.$$

it. 3) $B = \{3, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, la base $B = \{3, 4\}$ è ottima. La soluzione $\bar{x} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \end{bmatrix}$ è primale ottima, mentre la soluzione $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ è duale ottima.

Se il costo di x_1 diventasse 1 mentre il costo di x_2 diventasse 2, la soluzione di base primale non cambierebbe, e la base $B = \{3, 4\}$ resterebbe quindi primale ammissibile. La soluzione di base duale invece cambierebbe, diventando

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale soluzione è duale ammissibile in quanto $\bar{y}_B \geq 0$. Pertanto, la base $B = \{3, 4\}$ restebbe ottima per il problema modificato, ma la soluzione ottima duale cambierebbe.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [0, 1]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso $\bar{x}$ sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{\, cx \;:\; Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \quad \min\{\, yb \;:\; yA = c\;,\;, y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). Allora, $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \qquad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 5y_1 & + & y_2 & & & & & & \\ & y_1 & - & y_2 & & & - & y_4 & = & -1 \\ & 2y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

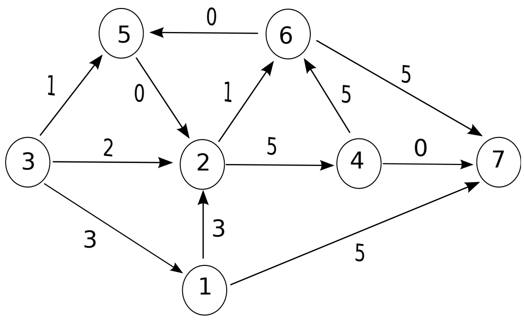
È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = [0, 1]$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{2, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_1 = \bar{y}_3 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} -y_2 \;-\; y_4 \;=\; -1 \\ y_2 \;=\; 1 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $[1, 0]$; $\bar{y} = [0, 1, 0, 0]$ ha componenti non negative, pertanto $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P) e $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima di (D). Infine, poiché la sottomatrice dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è di rango massimo e di ordine 2, segue che $\bar{x}$ è una soluzione di base (ammissibile) non degenere.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui l'arco $(6,5)$ cambiasse orientamento, ovvero diventasse $(5,6)$, e il suo costo fosse un parametro reale ϵ, per quali valori di tale parametro l'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3? E per quali valori di ϵ tale albero sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3? Giustificare le risposte.



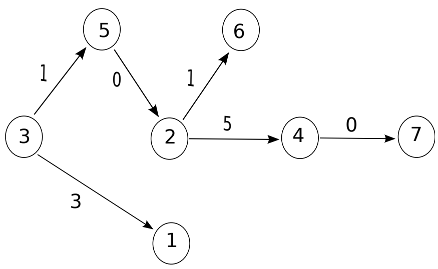
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo orientato $(2,6,5)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		3	3	*nil*	3	3	3	3	31	31	0	31	31	31	31	$\{3\}$
1	3	3	3	*nil*	3	3	3	3	3	2	0	31	1	31	31	$\{1,2,5\}$
2	5	3	5	*nil*	3	3	3	3	3	1	0	31	1	31	31	$\{1,2\}$
3	2	3	5	*nil*	2	3	2	3	3	1	0	6	1	2	31	$\{1,4,6\}$
4	6	3	5	*nil*	2	3	2	6	3	1	0	6	1	2	7	$\{1,4,7\}$
5	1	3	5	*nil*	2	3	2	6	3	1	0	6	1	2	7	$\{4,7\}$
6	4	3	5	*nil*	2	3	2	4	3	1	0	6	1	2	6	$\{7\}$
7	7	3	5	*nil*	2	3	2	4	3	1	0	6	1	2	6	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



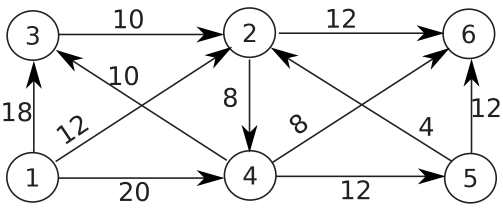
Nel caso in cui l'arco $(6,5)$ cambiasse orientamento, ovvero diventasse $(5,6)$, e il suo costo fosse un parametro reale ϵ, l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 per tutti e soli i valori di ϵ per cui $(5,6)$ soddisfa le condizioni di ottimalità di Bellman:

- $d(5) + \epsilon \geq d(6)$, ovvero $1 + \epsilon \geq 2$.

Segue che l'albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 se e solo se $\epsilon \geq 1$.

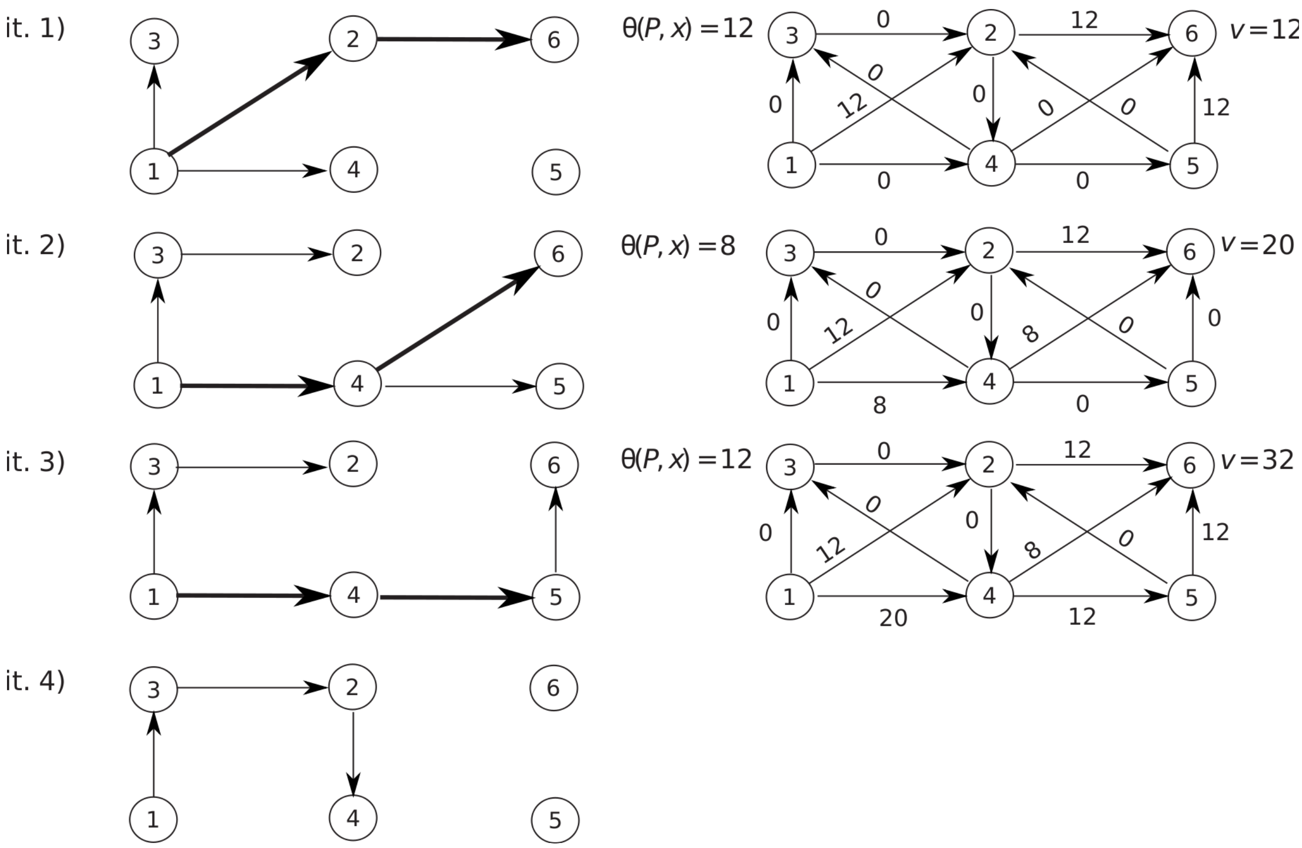
Poiché per $\epsilon = 1$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(5,6)$ valgono in forma di uguaglianza e $(5,6)$ può sostituire $(2,6)$ nell'albero, si ha che l'albero determinato sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3 per $\epsilon > 1$ (si osservi che, per gli altri archi non appartenenti all'albero, le condizioni di Bellman valgono in forma di disuguaglianza stretta).

4) Si individui un flusso massimo dal nodo sorgente 1 al nodo destinazione 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se l'arco (1,2) avesse capacità 13? Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni dell'algoritmo sono rappresentate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{46} + u_{45} = 12 + 8 + 12 = 32 = v$.



Se l'arco (1,2) avesse capacità 13 il valore del flusso massimo sarebbe sempre pari a 32 in quanto il taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ continuerebbe ad essere un taglio di capacità (minima) 32.

5) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

SVOLGIMENTO L'enunciato del Teorema Forte della Dualità è il seguente. Sia data una coppia (P) e (D) di problemi duali in forma asimmetrica: se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora

$$z(P) = \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b\ \}\ =\ \min\{\ yb\ :\ yA = c\ ,\ y \geq 0\ \} = z(D)\ \ .$$

La dimostrazione procede come segue.

Innanzitutto, per il Teorema debole della dualità, poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere (superiormente) illimitato. Essendo non vuoto, (P) ha pertanto ottimo finito e quindi almeno una soluzione ottima, che denotiamo con x^*. Segue che non possono esistere direzioni ξ ammissibili di crescita per x^* (vale in effetti anche l'implicazione inversa).

Se $c = 0$, allora $z(P) = 0$ e $y = 0$, ammissibile per (D), è quindi ottima; in questo caso il Teorema è quindi dimostrato. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e denotiamo con I l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^*. È immediato notare che $I \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, qualsiasi direzione sarebbe ammissibile per x^*, e quindi in particolare c $(\neq 0)$ sarebbe una direzione ammissibile di crescita.

Consideriamo adesso i sistemi *Primale Ristretto* e *Duale Ristretto* (ovvero primale e duale ristretti ai soli vincoli attivi), che caratterizzano le direzioni ammissibili di crescita per x^*:

$$(P_R)\quad \left\{ \begin{array}{rl} A_I\xi & \leq 0 \\ c\xi & > 0 \end{array} \right. \qquad\qquad (D_R)\quad \left\{ \begin{array}{ll} y_IA_I & = c \\ y_I & \geq 0. \end{array} \right.$$

Poiché x^* è ottima, il sistema (P_R) non può avere soluzioni. Per il Lemma di Farkas, quindi, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione $\bar{y}_I$. La soluzione $\bar{y} = [\,\bar{y}_I\ ,\ 0\,]$ è pertanto ammissibile per (D), poiché $\bar{y}A = \bar{y}_IA_I = c$ e $\bar{y}_I \geq 0$ implica $\bar{y} \geq 0$.

Infine, è immediato verificare che $\bar{y}$ ed x^* rispettano le *condizioni degli scarti complementari*, in quanto hanno lo stesso valore della funzione obiettivo (rispettivamente duale e primale). Per questo è sufficiente notare che

$$\bar{y}b = \bar{y}_Ib_I = \bar{y}_IA_Ix^* = cx^*$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla definizione di I e la terza dal fatto che $\bar{y}_I$ risolve (D_R). Segue che $\bar{y}$ è ottima per (D), e la tesi segue.

6) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare Intera:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
-\min & -8x_1 & -15x_2 & -7x_3 & -4x_4 & -x_5 & -2x_6 & & \\
& -3x_1 & -5x_2 & -3x_3 & -3x_4 & -2x_5 & -2x_6 & \geq & -15 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Lo si formuli come problema di zaino binario, e quindi lo si risolva mediante l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima anche nel caso di capacità dello zaino pari a 14, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Utilizzando le tecniche di trasformazione sintattica apprese durante il corso, il problema può essere riformulato, in termini di problema di zaino binario, nel modo seguente:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
\max & 8x_1 & +15x_2 & +7x_3 & +4x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\
& 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 15 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili non sono ordinate per Costo Unitario Decrescente (CUD). L'ordine CUD è: x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5.

Inizializzazione La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice $x^* = [1, 1, 1, 1, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 35$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 34$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_6.

$x_6 = 1$ $x^* = [1, 1, 1, 2/3, 0, 1]$, $\bar{z} = 34 + 2/3$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 33$. Poiché $\underline{z} = 33 < z = 34$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 34. Pertanto, poiché $\bar{z} = 34 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_6 = 0$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 34 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} = 34 = z$, z non cambia. Anche in questo caso inoltre, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 34. Pertanto, poiché $\bar{z} = 34 = \underline{z}$, il nodo viene chiuso per ottimalità (come pure dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$, di costo 34. Tale soluzione è ammissibile anche nel caso in cui la capacità dello zaino sia 14. Si osservi inoltre che il problema di zaino risolto mediante l'algoritmo Branch&Bound è un rilassamento del problema di zaino con capacità pari a 14. Di conseguenza, poiché la soluzione ottima di tale rilassamento è ammissibile per il problema con capacità 14, e la funzione obiettivo è invariata, segue che la soluzione $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$ è ottima anche per lo scenario con capacità 14.