RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il problema di *PL* dato applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h. Assumendo poi che il costo della variabile x_1 sia un parametro reale α, si determini: i) il sottoinsieme dei valori di α per cui la soluzione ottima primale precedentemente individuata continui a restare ottima; ii) l'insieme delle soluzioni ottime primali nel caso speciale di i) in cui $\alpha = -4$. Giustificare le risposte.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & & & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & -1
\end{array}
$$

SVOLGIMENTO

$$
\text{it. 1) } B = \{1,4\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = 6,
$$

$$
\eta_B == A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 0,
$$

$$
h = h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = 4
$$

$$
\text{it. 2) } B = \{1,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k = 3,
$$

$$
\eta_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 2, \quad h = 1
$$

$$
\text{it. 3) } B = \{3,6\}\text{: } A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP}.
$$

$B = \{3, 6\}$ è una base ottima: $\bar{x} = [\,-1\,,\,-4\,]$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = [\,0\,,\,0\,,\,2\,,\,0\,,\,0\,,\,4\,]$ è una soluzione ottima per il problema duale.

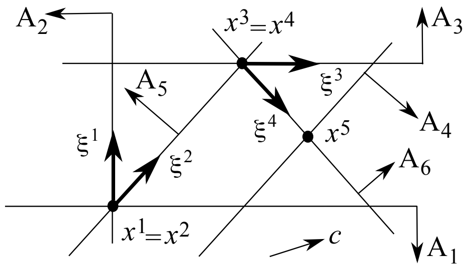
Assumiamo ora che il costo della variabile x_1 sia un parametro reale α.

i) Essendo $B = \{3, 6\}$ una base ottima primale non degenere (in quanto $I(\bar{x}) = \{3, 6\} = B$), si ha che $\bar{x} = [\,-1\,,\,-4\,]$ continua ad essere una soluzione ottima primale per tutti e soli i valori di α per cui $\bar{y}_B(\alpha) = [\,\alpha\,,\,2\,]A_B^{-1}$ risulta avere tutte componenti non negative. Essendo $\bar{y}_B(\alpha) = [\,2\,,\,\alpha + 4\,]$, ciò si verifica se e solo se $\alpha \geq -4$.

ii) Nel caso speciale di *i*) in cui $\alpha = -4$, si ha $\bar{y}_B(\alpha) = [\,2\,,\,0\,]$. Di conseguenza, l'insieme delle soluzioni ottime primali è dato dall'insieme delle soluzioni primali ammissibili che rispettano le condizioni degli scarti complementari con la soluzione ottima duale $[\,0\,,\,0\,,\,2\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]$. Ciò implica che il terzo vincolo primale deve risultare attivo, ovvero deve valere $x_2 = 2x_1 - 2$. Inoltre, tutti i restanti vincoli primali devono risultare soddisfatti. Sostituendo $x_2 = 2x_1 - 2$ nei restanti vincoli del problema primale, si ricava che deve valere $-4/3 \leq x_1 \leq -1$. Segue che, per $\alpha = -4$, l'insieme delle soluzioni ottime primali è

$$\{\,[\,x_1\,,\,2x_1 - 2\,]\;:\;-4/3 \leq x_1 \leq -1\,\}.$$

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione primale e duale delle basi visitate.



SVOLGIMENTO

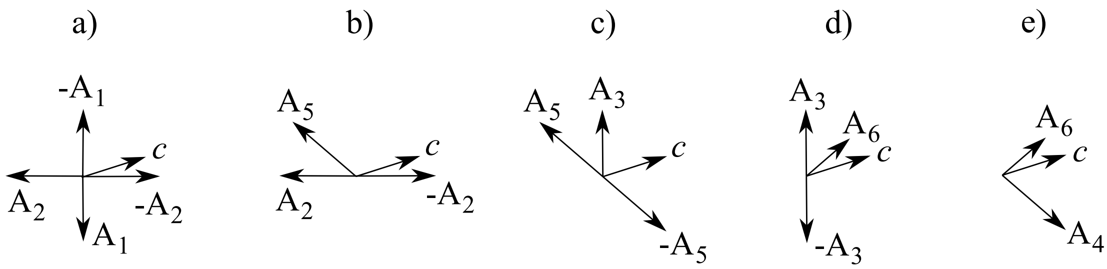
it. 1) $B = \{1, 2\}$. $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in a): quindi, $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{1, 2\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La direzione ξ^1 appartiene quindi alla frontiera del vincolo 2 (che resta in base) e tende ad allontanare dalla frontiera del vincolo 1 (che esce di base). La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{\, 1\,,\, 2\,,\, 5 \,\} \supset B$, ma duale non degenere perchè nessuna delle variabili duali in base ha valore zero (c è interno al cono generato da A_1 ed $-A_2$, ossia non coincide con nessuno dei due generatori). Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 5, attivo ma non in base: quindi $k = 5$ e si esegue un'iterazione degenere.

it. 2) $B = \{2, 5\}$. $y_2 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché c è interno al cono generato da $-A_2$ e A_5, come mostrato in b); quindi $h = 2$. La base è sempre primale degenere, ed è ancora duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei due vincoli 3 e 6, quindi $k = \min\{3, 6\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3) $B = \{3, 5\}$. $y_3 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c è interno al cono generato da A_3 e $-A_5$, come mostrato in c); quindi $h = 5$. La direzione ξ^3 appartiene alla frontiera del vincolo 3 (che resta in base) e tende ad allontanare dalla frontiera del vincolo 5 (che esce di base). La base è di nuovo primale degenere in quanto $I(x^3) = \{\, 3\,,\, 5\,,\, 6 \,\} \supset B$, ed è inoltre duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 6, attivo ma non in base, quindi $k = 6$ e si esegue un'altra iterazione degenere.

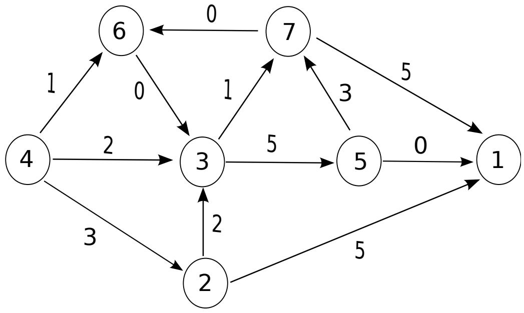
it. 4) $B = \{3, 6\}$. $y_3 < 0$ e $y_6 > 0$ poiché c è interno al cono generato da $-A_3$ e A_6, come mostrato in d); quindi $h = 3$. La base rimane primale degenere, ed è ancora duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^4 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 4, quindi $k = 4$.

it. 5) $B = \{4, 6\}$. $y_4 > 0$ e $y_6 > 0$ poiché c è interno al cono generato da A_4 e A_6, come mostrato in e). La base è quindi sia primale che duale ammissibile, e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per entrambi i problemi. La base è sia primale che duale non degenere (di conseguenza le soluzioni ottime determinate, primale e duale, sono uniche).



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell'arco $(5,1)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 4? E per quali valori di ϵ tale albero sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 4? Giustificare le risposte.



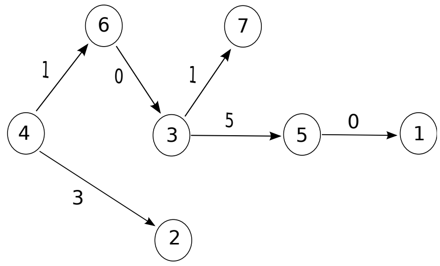
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(3,7,6)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		4	4	4	*nil*	4	4	4	31	31	31	0	31	31	31	$\{4\}$
1	4	4	4	4	*nil*	4	4	4	31	3	2	0	31	1	31	$\{2,3,6\}$
2	6	4	4	6	*nil*	4	4	4	31	3	1	0	31	1	31	$\{2,3\}$
3	3	4	4	6	*nil*	3	4	3	31	3	1	0	6	1	2	$\{2,5,7\}$
4	7	7	4	6	*nil*	3	4	3	7	3	1	0	6	1	2	$\{2,5,1\}$
5	2	7	4	6	*nil*	3	4	3	7	3	1	0	6	1	2	$\{5,1\}$
6	5	5	4	6	*nil*	3	4	3	6	3	1	0	6	1	2	$\{1\}$
7	1	5	4	6	*nil*	3	4	3	6	3	1	0	6	1	2	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



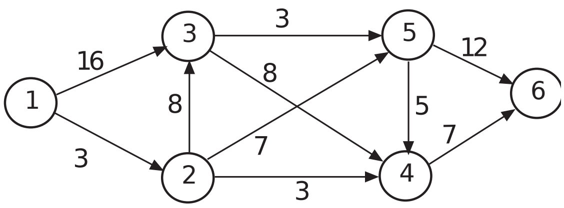
Se il costo dell'arco $(5,1)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 4 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Si osservi che, in tal caso, si avrebbe $d(1) = 6 + \epsilon$. Occorrerebbe quindi garantire che, per tutti gli archi esterni all'albero, ed incidenti il nodo 1, tali condizioni continuino ad essere rispettate:

- $d(7) + 5 \geq d(1)$, ovvero $2 + 5 \geq 6 + \epsilon$
- $d(2) + 5 \geq d(1)$, ovvero $3 + 5 \geq 6 + \epsilon$.

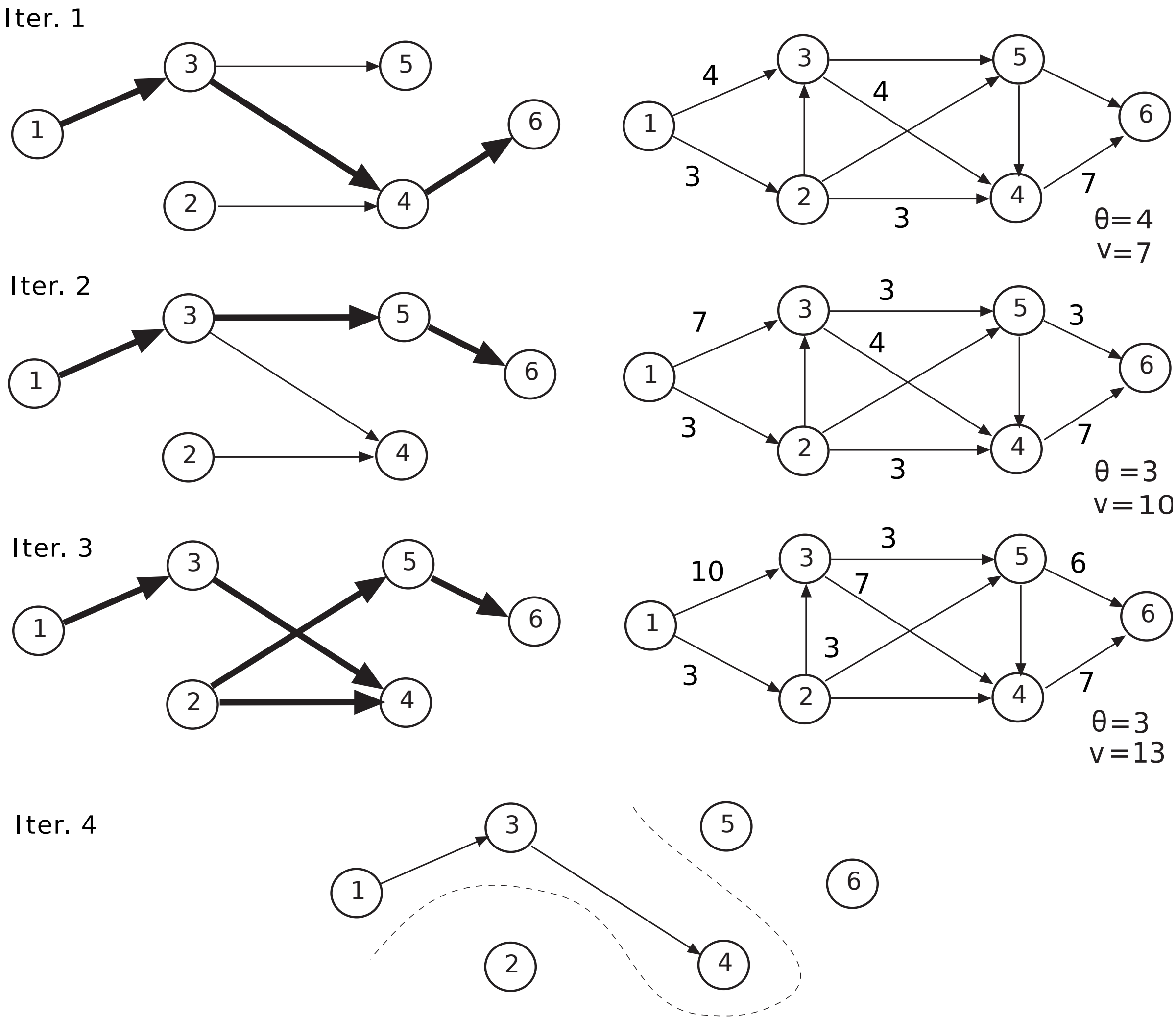
Segue che l'albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 4 se e solo se $\epsilon \leq 1$.

Poiché per $\epsilon = 1$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(7,1)$ valgono in forma di uguaglianza e $(7,1)$ può sostituire $(5,1)$ nell'albero, per tale valore di ϵ l'albero determinato non è l'unico albero dei cammini minimi di radice 4. Per $\epsilon < 1$, invece, le condizioni di Bellman valgono in forma di disuguaglianza stretta per tutti gli archi, e pertanto l'albero determinato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 4.

4) Si risolva il problema di flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sull'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si parta dal flusso x, di valore $v = 3$, tale che $x_{1,2} = x_{2,4} = x_{4,6} = 3$, e $x_{i,j} = 0$ altrimenti. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta infine quali sarebbero il flusso massimo e il taglio di capacità minima restituiti dall'algoritmo qualora la capacità dell'arco $(1, 3)$ fosse pari a 10 invece che a 16. Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO
Le iterazioni sono mostrate in figura. Gli archi in neretto indicano il cammino aumentante selezionato, mentre il flusso corrente x è rappresentato trascurando per semplicità i valori di flusso pari a 0. Nella figura corrispondente all'ultima iterazione, la linea tratteggiata indica il taglio di capacità minima individuato dall'algoritmo. Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo e il taglio (N_s, N_t), con $N_s = \{1, 3, 4\}$ e $N_t = \{2, 5, 6\}$, è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 3 + 3 + 7 = 13$.



Se la capacità dell'arco $(1, 3)$ fosse pari a 10 invece che a 16, il flusso ottenuto al termine della terza iterazione sarebbe ancora ottimo. L'algoritmo determinerebbe tuttavia un diverso taglio di capacità minima, ovvero il taglio (N_s, N_t) con $N_s = \{1\}$ e $N_t = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, avente capacità $u(N_s, N_t) = 10 + 3 = 13$.

5) Con riferimento alla Teoria della Dualità della Programmazione Lineare, si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

SVOLGIMENTO

L'enunciato del Teorema Forte della Dualità è il seguente. Sia data una coppia (P) e (D) di problemi duali in forma asimmetrica: se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora

$$z(P) = \max\{\, cx \;:\; Ax \le b \,\} \;=\; \min\{\, yb \;:\; yA = c \,,\; y \ge 0 \,\} = z(D) \;\; .$$

La dimostrazione procede come segue.

Innanzitutto, per il Teorema debole della dualità, poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere (superiormente) illimitato. Essendo non vuoto, (P) ha pertanto ottimo finito e quindi almeno una soluzione ottima, che denotiamo con x^*. Segue che non possono esistere direzioni ξ ammissibili di crescita per x^* (vale in effetti anche l'implicazione inversa).

Se $c = 0$, allora $z(P) = 0$ e $y = 0$, ammissibile per (D), è quindi ottima; in questo caso il Teorema è quindi dimostrato. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e denotiamo con I l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^*. È immediato notare che $I \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, qualsiasi direzione sarebbe ammissibile per x^*, e quindi in particolare c $(\neq 0)$ sarebbe una direzione ammissibile di crescita.

Consideriamo adesso i sistemi *Primale Ristretto* e *Duale Ristretto* (ovvero primale e duale ristretti ai soli vincoli attivi), che caratterizzano le direzioni ammissibili di crescita per x^*:

$$(P_R) \quad \begin{cases} A_I\xi & \le 0 \\ c\xi & > 0 \end{cases} \qquad\qquad (D_R) \quad \begin{cases} y_I A_I & = c \\ y_I & \ge 0. \end{cases}$$

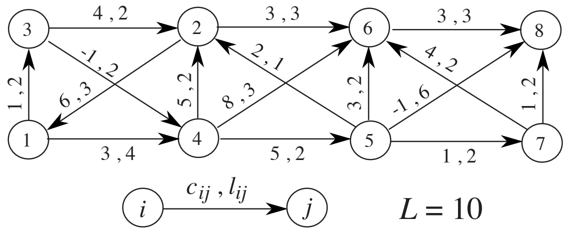
Poiché x^* è ottima, il sistema (P_R) non può avere soluzioni. Per il Lemma di Farkas, quindi, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione $\bar{y}_I$. La soluzione $\bar{y} = [\, \bar{y}_I \,,\, 0 \,]$ è pertanto ammissibile per (D), poiché $\bar{y}A = \bar{y}_I A_I = c$ e $\bar{y}_I \ge 0$ implica $\bar{y} \ge 0$.

Infine, è immediato verificare che $\bar{y}$ ed x^* rispettano le *condizioni degli scarti complementari*, in quanto hanno lo stesso valore della funzione obiettivo (rispettivamente duale e primale). Per questo è sufficiente notare che

$$\bar{y}b = \bar{y}_I b_I = \bar{y}_I A_I x^* = cx^*$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla definizione di I e la terza dal fatto che $\bar{y}_I$ risolve (D_R). Segue che $\bar{y}$ è ottima per (D), e la tesi segue.

6) Si risolva il problema del cammino minimo vincolato dal nodo 1 al nodo 8, sul grafo in figura, mediante l'algoritmo Branch&Bound che usa come rilassamento il problema di cammino minimo (non vincolato), non fa ricorso a euristiche, visita l'albero delle decisioni a ventaglio, e usa la seguente regola di branching: dato il cammino minimo ottenuto dal rilassamento, genera il primo figlio eliminando il primo arco del cammino, genera il secondo figlio fissando in soluzione il primo arco del cammino e eliminando il secondo, genera il terzo figlio fissando in soluzione i primi due archi del cammino ed eliminando il terzo, e così via fino all'ultimo sottocammino (di origine 1) la cui lunghezza è minore della soglia massima. Per ogni nodo si riporti la soluzione del rilassamento e si indichi se il nodo viene chiuso e perché, oppure se viene effettuato il branching e come. Si esaminino solamente i primi cinque nodi dell'albero delle decisioni, compresa la radice. Al termine si riportino la miglior valutazione inferiore e la miglior valutazione superiore del valore ottimo disponibili, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo rispettivamente con $c(P)$ e $l(P)$ il costo e la lunghezza del cammino minimo P individuato nel nodo corrente, dove $c(P)$ è il costo totale del cammino, dato dall'etichetta del nodo destinazione nell'albero dei cammini minimi più il costo dell'eventuale sottocammino iniziale fissato. Si noti che $c(P)$ è una valutazione inferiore per il nodo considerato, e anche una valutazione superiore se $l(P) \leq L$. Indichiamo inoltre con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'SPT ottenuto è mostrato in a) insieme alle etichette ottime, che certificano il soddisfacimento delle condizioni di Bellman. Il cammino $P = \{(1,3),(3,4),(4,5),(5,8)\}$ ha $c(P) = 4$ ma $l(P) = 12$, e quindi non è ammissibile. Non avendo ottenuto nessuna soluzione ammissibile si ha $z = +\infty > c(P) = 4$ e occorre procedere con il branching, generando un nodo dell'albero delle decisioni in cui si elimina l'arco $(1,3)$, un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(1,3)$ e si elimina l'arco $(3,4)$, un terzo in cui si fissano in soluzione gli archi $(1,3)$ e $(3,4)$ e si elimina l'arco $(4,5)$, ed un quarto in cui si fissano in soluzione gli archi $(1,3)$, $(3,4)$ e $(4,5)$ e si elimina l'arco $(5,8)$.

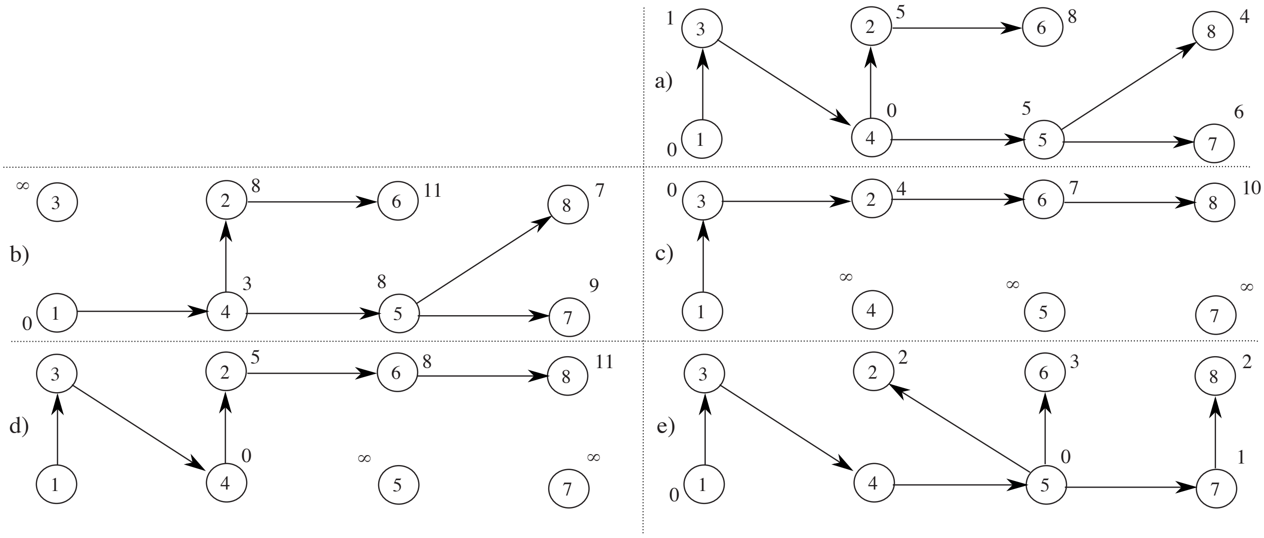
$\boxed{x_{13} = 0}$ L'SPT ottenuto è mostrato in b). $c(P) = 7$ ma $l(P) = 12$. Pertanto $z = +\infty > 7 = c(P)$ e occorre procedere con il branching, creando i tre nodi $x_{13} = x_{14} = 0$; $x_{13} = x_{45} = 0$ e $x_{14} = 1$; $x_{13} = x_{58} = 0$ e $x_{14} = x_{45} = 1$.

$\boxed{x_{13} = 1, x_{34} = 0}$ L'SPT di radice 3 è mostrato in c). $c(P) = 10 + 1 = 11$, e $l(P) = 10$. Pertanto è stata determinata una soluzione ammissibile: $z = +\infty > 11 = c(P)$ e quindi si pone $z = 11$. Inoltre, il nodo viene potato per ottimalità (come pure dalla valutazione inferiore).

$\boxed{x_{13} = x_{34} = 1, x_{45} = 0}$ L'SPT di radice 4 è mostrato in d). $c(P) = 11$ mentre $l(P) = 14$. Il cammino non è quindi ammissibile, ma poiché $c(P) = 11 \geq 11 = z$ il nodo viene potato dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{13} = x_{34} = x_{45} = 1,\ x_{58} = 0}$ L'SPT di radice 5 è mostrato in e). $c(P) = 7$ e $l(P) = 10$. Pertanto è stata determinata un'altra soluzione ammissibile: siccome $z = 11 > 7 = c(P)$, si pone $z = 7$. Inoltre, il nodo viene potato per ottimalità (come pure dalla valutazione inferiore).

Avendo visitato cinque nodi, l'algoritmo termina anche se $Q \neq \emptyset$. La miglior valutazione superiore è $z = 7$. L'analisi dell'algoritmo Branch&Bound assicura che la migliore valutazione inferiore disponibile è pari a $\min\{\ z\ ,\ \min\{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. Q contiene tutti i figli del nodo $\boxed{x_{13} = 0}$, e pertanto la miglior valutazione inferiore è pari alla valutazione inferiore di quel nodo, ossia 7. Poiché $z = 7$, il gap ottenuto è nullo: il problema è stato risolto all'ottimo anche se Q non è ancora vuota.


a)
b)
c)
d)
e)