RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il vettore η_B, il passo di spostamento e l'indice uscente, giustificando le risposte. Al termine, in caso di ottimo finito, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, e si verifichi se $y = [0, 0, 0, 3, 2]$ sia una soluzione ottima duale alternativa a quella individuata dall'algoritmo. Giustificare le risposte.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2
\end{array}
$$

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 3, 5\ \} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 4$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1, \quad h = 1$$

it. 3) $B = \{3, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

$B = \{3, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = [2, 0]$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [0, 0, 1, 0, 1]$ è una soluzione ottima duale. Osserviamo che $\bar{x}$ è degenere: $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$. Pertanto, $\bar{y}$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima duale. Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni ammissibili che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$; quindi, affinché y, tale che $yA = c$, sia ottima deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché y sia ammissibile per il problema duale essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrl}
2y_3 & + & y_4 & - & y_5 & = 1 \\
y_3 & & & + & y_5 & = 2 \\
y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Ponendo $y_5 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $[(2 - \alpha), 3\alpha - 3, \alpha]$, per $1 \leq \alpha \leq 2$. Pertanto il problema duale ammette infinite soluzioni ottime della forma $y(\alpha) = [0, 0, (2 - \alpha), 3\alpha - 3, \alpha]$, per $1 \leq \alpha \leq 2$. Ponendo $\alpha = 2$, segue che $y = [0, 0, 0, 3, 2]$ è una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

2) Si consideri il seguente problema di PL, in cui γ è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & (-1-\gamma)x_1 & + & (-1+2\gamma)x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si individui il sottoinsieme di valori di γ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale problema, giustificando la risposta. Si consideri quindi la seguente variante del problema, in cui α è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & - & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\ & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si individui il sottoinsieme di valori di α per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale secondo problema di PL.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il primo problema di PL, e calcoliamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

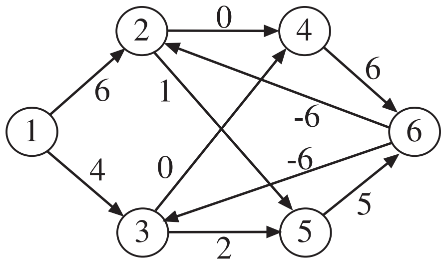
E' immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i primi tre vincoli del problema. Calcoliamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro γ:

$$y_B = \begin{bmatrix} (-1-\gamma) & (-1+2\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix}.$$

$B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $y_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\gamma \in [-1, 0]$. Segue che $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il primo problema di PL se e solo se $\gamma \in [-1, 0]$.

Consideriamo ora il secondo problema di PL. La base $B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile per tale problema, in quanto il vettore dei costi di tale problema si ottiene dal vettore dei costi del problema di PL precedentemente considerato fissando $\gamma = 0$. La soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$ è $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, come nel caso precedente. Tale soluzione è primale ammissibile se e solo se essa soddisfa i vincoli fuori base, vale a dire i primi tre vincoli del problema. E' facile verificare che tale soddisfacimento avviene se e solo se $\alpha \in [0, 1]$. Segue che $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il secondo problema di PL se e solo se $\alpha \in [0, 1]$.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



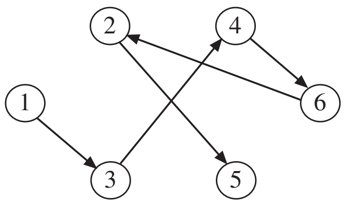
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(3, 5, 6)$, e archi di costo negativo. Pertanto l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo è SPT.L in cui Q è implementato come una coda, ovvero l'algoritmo di Bellman, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31.$

it.	u	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	Q
0		0	31	31	31	31	31	nil	1	1	1	1	1	$\{1\}$
1	1	0	6	4	31	31	31	nil	1	1	1	1	1	$\{2, 3\}$
2	2	0	6	4	6	7	31	nil	1	1	2	2	1	$\{3, 4, 5\}$
3	3	0	6	4	4	6	31	nil	1	1	3	3	1	$\{4, 5\}$
4	4	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4	$\{5.6\}$
5	5	0	6	4	4	6	10	nil	1	1	3	3	4	$\{6\}$
6	6	0	4	4	4	6	10	nil	6	1	3	3	4	$\{2\}$
7	2	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4	$\{5\}$
8	5	0	4	4	4	5	10	nil	6	1	3	2	4	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi individuato è:



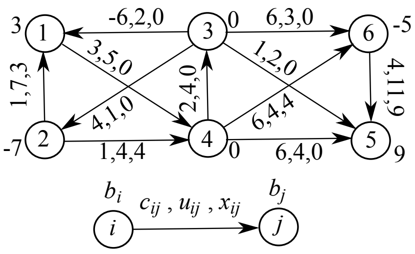
Tale albero è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1, nonostante esistano tre archi non appartenenti all'albero che soddisfano le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza. Infatti:

1. $d(5) + 5 = 5 + 5 = 10 = d(6)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(5, 6)$ valgono in forma di uguaglianza: $(5, 6)$ non può essere inserito al posto di $(4, 6)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;

2. $d(2)+0 = 4+0 = 4 = d(4)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(2, 4)$ valgono in forma di uguaglianza: $(2, 4)$ non può essere inserito al posto di $(3, 4)$ perché si creerebbe un ciclo orientato;

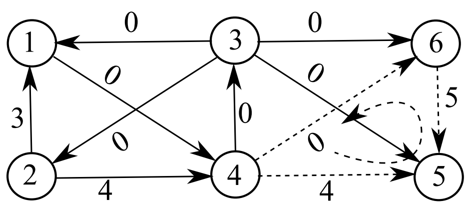
3. $d(6) - 6 = 10 - 6 = 4 = d(3)$, ovvero le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 3)$ valgono in forma di uguaglianza: $(6, 3)$ non può essere inserito al posto di $(1, 3)$ perché si creerebbe un ciclo orientato.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo, relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 67$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

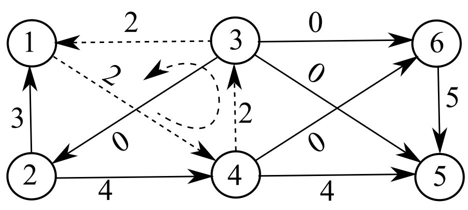


SVOLGIMENTO

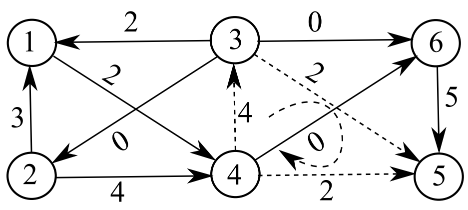
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



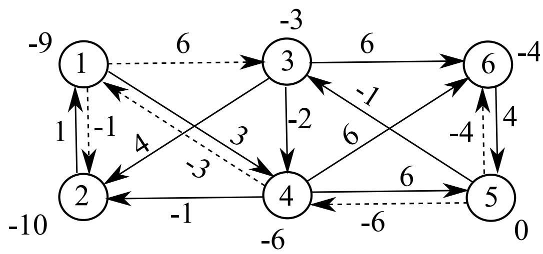
$\theta = 4$, $c(C) = -4$, $cx = 51$



$\theta = 2$, $c(C) = -1$, $cx = 49$



$\theta = 2$, $c(C) = -3$, $cx = 43$



5) Si consideri un sistema wireless di tipo WLAN (Wireless Local Area Networks), caratterizzato da n utenti con domanda di connessione pari a a_i Kbps, $i = 1, \ldots, n$. In tale sistema sono presenti m punti d'accesso non capacitati per il soddisfacimento delle domande degli utenti.

Ognuno degli n utenti va assegnato ad esattamente un punto d'accesso per il soddisfacimento della propria domanda di connessione. Inoltre, per motivi di equilibrio, si richiede che il rapporto tra la minima domanda totale e la massima domanda totale che i punti d'accesso si trovano a dover soddisfare (in seguito all'assegnamento degli utenti) sia maggiore o uguale di 1/2.

Noto il costo c_{ij} derivante dall'assegnamento dell'utente i al punto d'accesso j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere come assegnare gli utenti ai punti d'accesso rispettando il vincolo di equilibrio e minimizzando il costo totale di assegnamento.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti nm variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'utente } i \text{ è assegnato al punto d'accesso } j, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

I vincoli di semiassegnamento che garantiscono che ogni utente sia assegnato ad esattamente un punto d'accesso sono:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Introduciamo inoltre due variabili ausiliarie, w e z, che utilizzeremo per stimare, rispettivamente per difetto e per eccesso, la minima domanda totale e la massima domanda totale che i punti d'accesso devono soddisfare in seguito all'assegnamento degli utenti. Tali variabili ausiliarie devono rispettare i seguenti vincoli:

$$w \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq z, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Il vincolo di equilibrio è allora esprimibile mediante:

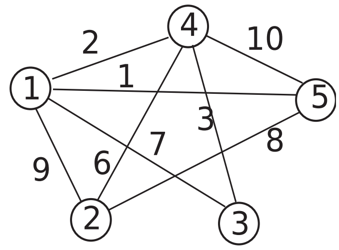
$$w \geq z/2.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di assegnamento: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$.

La formulazione del problema è quindi

$$\begin{array}{rrcll}
\min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & & & \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} & = & 1 & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - w & \geq & 0 & j = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - z & \leq & 0 & j = 1, \ldots, m \\
& 2w - z & \geq & 0 & \\
& x_{ij} & \in & \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m
\end{array}$$

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 19 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti, e creare $3(3-1)/2 = 3$ figli, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1,3\}$, $\{1,4\}$ e $\{1,5\}$.

$\boxed{x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo lato incidente nel grafo ridotto è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 25$, è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $25 < z = +\infty$, si pone $z = 25$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{15} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 26$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} = 26 > z = 25$, il nodo viene dalla valutazione inferiore.

Poiché Q è vuota l'algoritmo termina, restituendo la soluzione ottima in (b), di valore $z = 25$.