

## RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si risolve algebricamente il seguente problema di  $PL$

$$\begin{array}{rcll} \max & 2x_1 & & \\ & & x_2 & \leq 0 \\ & x_1 & -2x_2 & \leq 10 \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq 8 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & -x_1 & & \leq 0 \end{array}$$

mediante l'algoritmo del Simpleso Duale, partendo dalla base  $B = \{1, 2\}$ . Ad ogni iterazione si mostrino la base, la matrice di base e la sua inversa, le soluzioni di base, la direzione e il passo di spostamento, gli indici entrante ed uscente, giustificando le risposte. Discutere l'eventuale degenerazione primale e duale della base ottima.

### SVOLGIMENTO

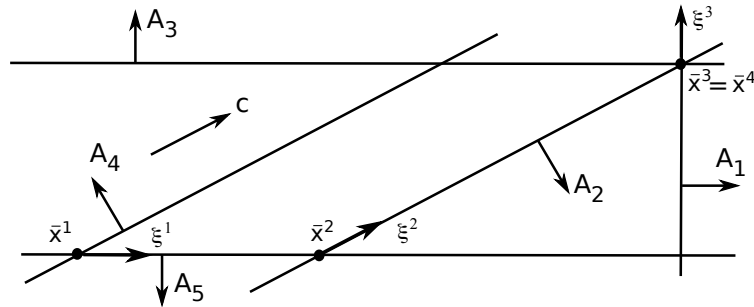
it. 1)  $B = \{1, 2\}$ ,  $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{y}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{y} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
 $A_N\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b_N$ ,  $k = \min\{i \in N : A_i\bar{x} > b_i\} = \min\{3, 4\} = 3$   
 $\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$   
 $\theta = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0\} = \min\{\bar{y}_1/\eta_1, \bar{y}_2/\eta_2\} = \min\{4/3, 1\} = 1$ ,  $h = 2$ .

it. 2)  $B = \{1, 3\}$ ,  $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{y}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
 $A_N\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b_N$ ,  $k = 4$   
 $\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ .  $\theta = \min\{2, 2\} = 2$ ,  $h = \min\{1, 3\} = 1$  (regola anticiclo di Bland)

it. 3)  $B = \{4, 3\}$ ,  $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$   
 $\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  (base duale degenera)  
 $A_N\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = b_N$ , STOP.

Poiché  $\bar{x} = [2, -4]$  è ammissibile, l'algoritmo termina:  $B = \{4, 3\}$  è una base ottima,  $\bar{x}$  è soluzione ottima del problema primale, e  $\bar{y} = [0, 0, 0, 2, 0]$  è soluzione ottima del problema duale. Poiché  $\bar{y}_3 = 0$  e  $3 \in B$  la base è duale degenera. Poiché inoltre  $A_2\bar{x} = b_2$  e  $2 \notin B$ , la base ottima è anche primale degenera.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell’algoritmo del Simpleso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base  $B = \{4, 5\}$ . Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base  $\bar{x}$  e la direzione di spostamento  $\xi$  (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Alla fine, se l’algoritmo termina con esito ottimo finito, si discuta l’unicità della soluzione ottima duale determinata.



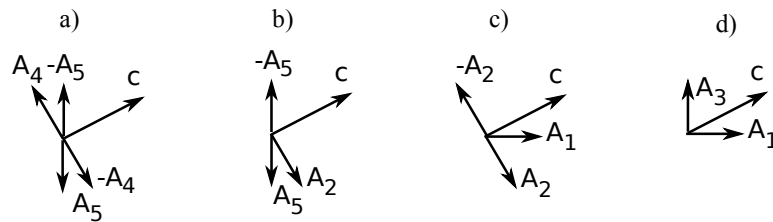
**SVOLGIMENTO**

it. 1)  $B = \{4, 5\}$ ,  $\bar{y}_4 < 0$  e  $\bar{y}_5 < 0$  poiché  $c$  appartiene (è interno) al cono generato da  $-A_4$  e  $-A_5$ , come mostrato in a); quindi,  $h = 4$  per la regola anticiclo di Bland. Il massimo passo lungo la direzione  $\xi^1$  si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 2, quindi  $k = 2$ .

it. 2)  $B = \{2, 5\}$ ,  $\bar{y}_2 > 0$  e  $\bar{y}_5 < 0$  poiché  $c$  appartiene al cono generato da  $A_2$  ed  $-A_5$ , come mostrato in b); quindi,  $h = 5$ . Il massimo passo lungo la direzione  $\xi^2$  si ottiene in corrispondenza dei due vincoli 1 e 3: quindi  $k = 1$ , per la regola anticiclo di Bland.

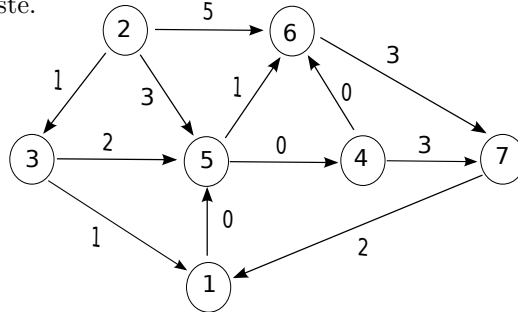
it. 3)  $B = \{1, 2\}$ ,  $\bar{y}_1 > 0$  e  $\bar{y}_2 < 0$  poiché  $c$  appartiene al cono generato da  $A_1$  e  $-A_2$ , come mostrato in c); quindi,  $h = 2$ . Il massimo passo lungo la direzione  $\xi^3$  si ottiene in corrispondenza del vincolo 3, attivo ma non in base; quindi  $k = 3$  e si esegue un cambio di base degenero.

it. 4)  $B = \{1, 3\}$ ,  $\bar{y}_1 > 0$  e  $\bar{y}_3 > 0$  poiché  $c$  appartiene al cono generato da  $A_1$  ed  $A_3$ , come mostrato in d); quindi l’algoritmo termina avendo individuato in  $\bar{x}^4$  una soluzione ottima del primale. Essendo  $\bar{x}^3 = \bar{x}^4$  (la terza iterazione è degenera), la soluzione primale era già ottima all’iterazione precedente, ma la soluzione duale non ha permesso di verificarlo.



Per discutere l’unicità della soluzione duale basta notare che la base ottima è primale degenera. In particolare, la base  $B' = \{2, 3\}$  induce la stessa soluzione di base primale,  $\bar{x}^3 = \bar{x}^4$ , ed è duale ammissibile. La soluzione di base duale corrispondente a  $B'$  è quindi anch’essa ottima, ed è diversa da quella corrispondente alla base  $B$  perché in quest’ultima  $\bar{y}_1 > 0$  ( $c$  è interno al cono generato da  $A_1$  ed  $A_3$ ), mentre per la soluzione duale corrispondente a  $B'$  si ha  $\bar{y}_1 = 0$  in quanto  $1 \notin B'$ . Pertanto la soluzione duale ottima del problema non è unica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati  $Q$ . Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell’arco  $(5, 6)$  fosse un parametro reale  $\epsilon$  (anzichè valere 1, come in figura), per quali valori di tale parametro l’albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di  $\epsilon$  l’albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.



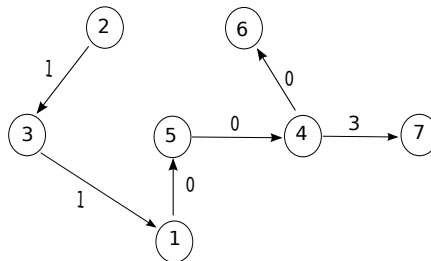
**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene il ciclo  $(1, 5, 6, 7)$  e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l’algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l’algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo  $O(n^2)$  nel caso in cui la coda di priorità  $Q$  sia implementata come una lista.

$$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$$

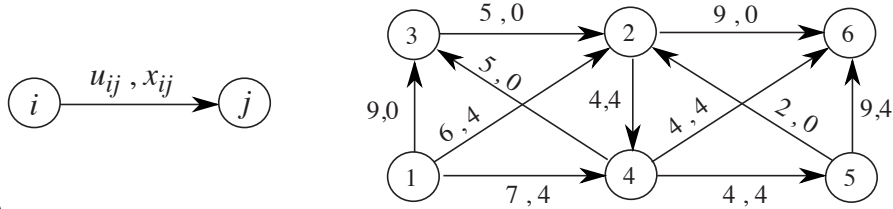
it.	$u$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$Q$
0		2	2	2	2	2	2	2	31	0	31	31	31	31	31	{2}
1	2	2	2	2	2	2	2	2	31	0	1	31	3	5	31	{5, 3, 6}
2	3	3	2	2	2	2	2	2	2	0	1	31	3	5	31	{1, 5, 6}
3	1	3	2	2	2	1	2	2	2	0	1	31	2	5	31	{5, 6}
4	5	3	2	2	5	1	5	2	2	0	1	2	2	3	31	{4, 6}
5	4	3	2	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	{6, 7}
6	6	3	2	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	{7}
7	7	3	2	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\emptyset$

L’albero trovato è mostrato in figura:



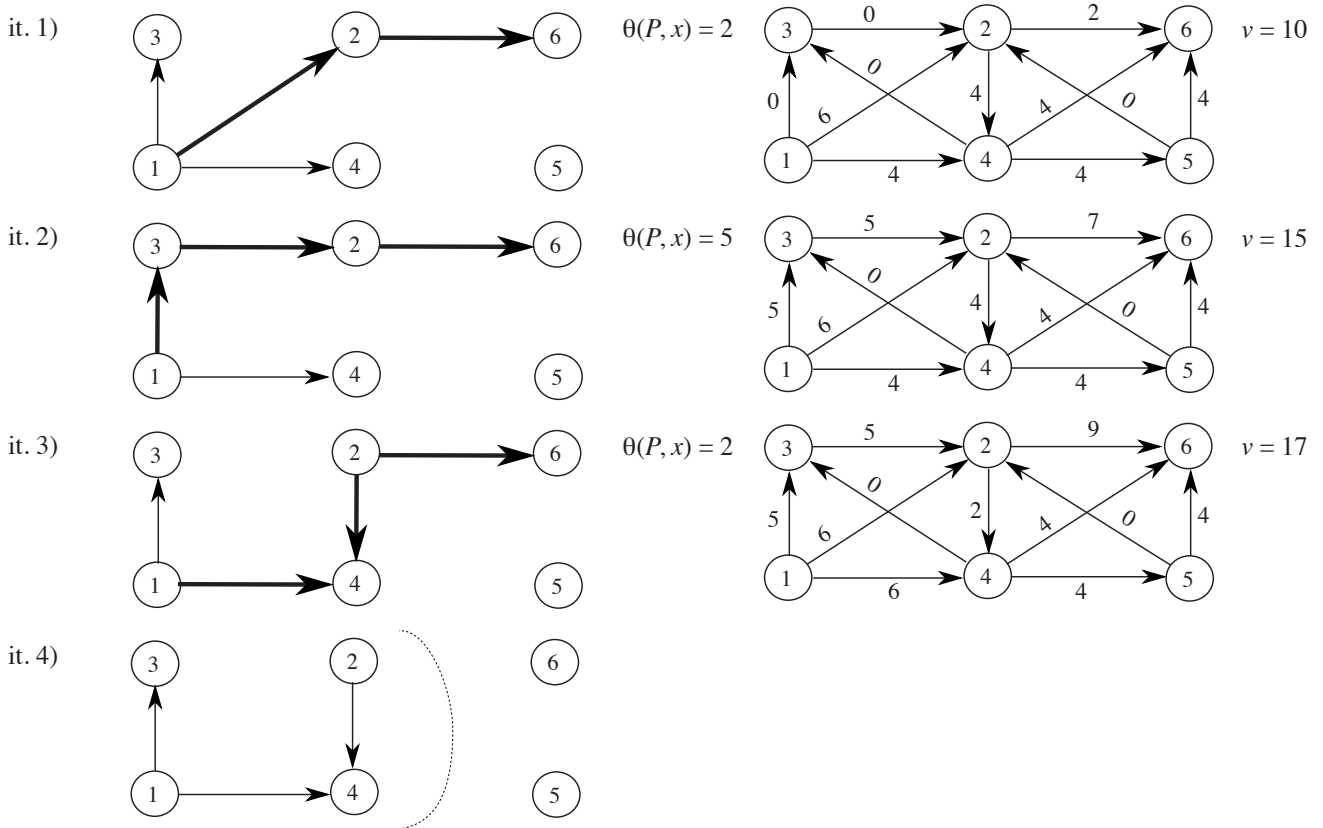
Se il costo dell’arco  $(5, 6)$  fosse pari a un parametro reale  $\epsilon$ , l’albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di  $\epsilon$  che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero per tutti e soli i valori di  $\epsilon$  tali che  $d(5) + \epsilon \geq d(6)$ . Segue che l’albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se  $\epsilon \geq 0$ . Poichè le condizioni di Bellman relative all’arco  $(6, 7)$  sono soddisfatte in forma di uguaglianza, e tale arco può sostituire  $(4, 7)$  mantenendo una struttura ad albero, segue che l’albero determinato non è l’unico albero dei cammini minimi di radice 2 a prescindere dal valore di  $\epsilon \geq 0$ .

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l’algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore  $v = 8$ . Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l’ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l’albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio  $(N_s, N_t)$  restituito dall’algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l’arco (4, 6) avesse capacità  $u_{46} = 5$ .



**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall’alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l’albero della visita ed il cammino aumentante  $P$  individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all’invio, lungo  $P$ , di una quantità di flusso pari alla capacità  $\theta(P, x)$ , con il relativo valore  $v$ . Al termine è riportato il taglio  $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$  determinato dall’algoritmo. I nodi in  $N_s$  sono quelli esplorati durante l’ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell’ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti  $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{46} + u_{45} = 9 + 4 + 4 = 17 = v$ .



Se l’arco (4, 6) avesse capacità  $u_{46} = 5$ , il flusso non sarebbe più ottimo. Infatti, poiché l’arco (4, 6) appartiene al taglio, la capacità del taglio aumenterebbe al valore  $u(N_s, N_t) = 18$ , e sarebbe possibile inviare un’ulteriore unità di flusso da 1 a 6 lungo il cammino  $\{(1, 4), (4, 6)\}$ , ottenendo un nuovo flusso di valore  $v = 18$  (e quindi massimo). Il taglio  $(N_s, N_t)$  precedentemente individuato rimarrebbe quindi un taglio di capacità minima, ma non sarebbe quello individuato dall’algoritmo, che invece troverebbe il taglio  $(\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ , anch’esso di capacità 18.

5) Si consideri il seguente problema di Programmazione Matematica:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x - y\|_\infty \\ & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w \\ & w \in \{3, 7, 11\} \\ & x, y \in R^2 \end{aligned}$$

dove  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma infinito in  $R^2$ , ovvero  $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$ . Si formuli il problema in termini di *Programmazione Lineare Intera*, giustificando la risposta.

### SVOLGIMENTO

Il problema di Programmazione Matematica proposto presenta vincoli lineari. Tuttavia la funzione obiettivo è non lineare. Inoltre, la variabile  $w$  è a valori discreti. Il problema può comunque essere formulato in termini di *Programmazione Lineare Intera* nel modo seguente:

$$\min v \tag{1}$$

$$x_1 - y_1 \leq v \tag{2}$$

$$y_1 - x_1 \leq v \tag{3}$$

$$x_2 - y_2 \leq v \tag{4}$$

$$y_2 - x_2 \leq v \tag{5}$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w \tag{6}$$

$$w = 3q_1 + 7q_2 + 11q_3 \tag{7}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1 \tag{8}$$

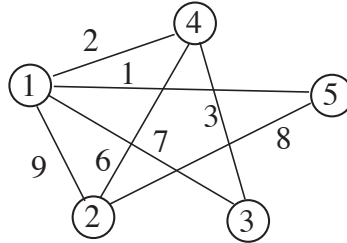
$$q_1, q_2, q_3 \in \{0, 1\} \tag{9}$$

Infatti, poiché  $\|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$  e  $|a| = \max\{a, -a\}$ , la funzione obiettivo può essere espressa come

$$\max\{x_1 - y_1, y_1 - x_1, x_2 - y_2, y_2 - x_2\}.$$

È quindi possibile linearizzarla introducendo la variabile ausiliaria  $v$  ed vincoli di soglia (2)–(5). In questo modo la variabile ausiliaria  $v$  stima per eccesso il massimo delle 4 differenze che definiscono la norma infinito del vettore  $x - y$ ; di conseguenza, minimizzare  $v$  (cf. (1)) equivale a minimizzare la norma infinito di  $x - y$  nella regione ammissibile data. Per rappresentare invece la variabile  $w$  a valori discreti, sono state introdotte le tre variabili binarie,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , relative ai tre valori che  $w$  può assumere, a somma 1 (cf. (8)), e si è espressa  $w$  mediante  $3q_1 + 7q_2 + 11q_3$  (cf. (7)). Si osservi che la variabile  $w$  è di fatto ridondante, e pertanto può essere eliminata dal modello combinando il lato sinistro di (6) con il lato destro di (7).

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore  $r > 2$  di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando  $r(r - 1)/2$  figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a  $r - 2$  di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi  $Q$  come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.



**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con  $\underline{z}$  la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con  $z$  la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente  $z = +\infty$ ). La coda  $Q$  viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

**Nodo radice** L'MS1T, con  $\underline{z} = 19$ , è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto  $\underline{z} = 19 < z = +\infty$  ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti, e creare  $3(3 - 1)/2 = 3$  figli, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$  e  $\{1, 5\}$ .

$x_{13} = 0$  Poiché il nodo 3 ha un solo lato incidente nel grafo ridotto è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$x_{14} = 0$  L'MS1T, con  $\underline{z} = 25$ , è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e  $25 < z = +\infty$ , si pone  $z = 25$ . Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$x_{15} = 0$  Poiché il nodo 5 ha un solo lato incidente nel grafo ridotto è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

Poiché  $Q$  è vuota, l'algoritmo termina, restituendo la soluzione ottima in (b), di valore  $z = 25$ .

