

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll} \max & -x_1 & + & x_2 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se \bar{x} sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso \bar{x} sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{ cx : Ax \leq b \} \qquad (D) \quad \min\{ yb : yA = c, y \geq 0 \}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P). \bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione \bar{y} ammissibile per (D) complementare a \bar{x} , ovvero tale che \bar{x} e \bar{y} verifichino le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 .$$

Per l'ammissibilità delle soluzioni \bar{x} e \bar{y} , le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Per il problema in esame si ha:

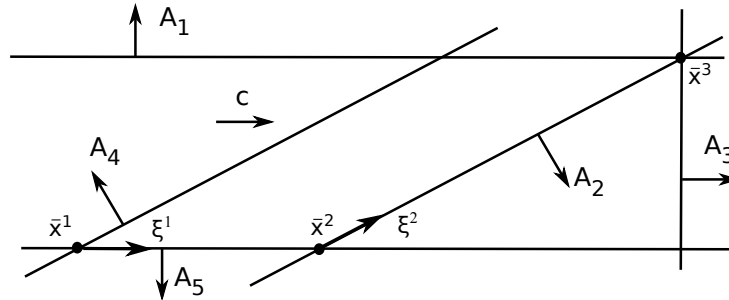
$$\begin{array}{rcll} \max & -x_1 & + & x_2 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ (P) & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \min & 10y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 \\ (D) & 2y_1 & - & y_2 & & - & 3y_4 & = & -1 \\ & 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in \bar{x} è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, una soluzione duale \bar{y} , tale che $\bar{y}A = c$, che formi con \bar{x} una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_4 = 0$. Affinché \bar{y} sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = -1 \\ 4y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Posto $y_1 = \alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $[\alpha, 2\alpha + 1, 6\alpha]$. $\bar{y}(\alpha) = [\alpha, 2\alpha + 1, 6\alpha, 0]$ ha componenti non negative per $\alpha \geq 0$. Pertanto \bar{x} è soluzione ottima di (P), e $\bar{y}(\alpha)$, per $\alpha \geq 0$, è l'insieme delle soluzioni ottime di (D). Infine, poiché la sottomatrice dei vincoli attivi in \bar{x} è di rango 2, segue che \bar{x} è una soluzione di base (ammissibile). È degenera in quanto $|I(\bar{x})| = 3 > 2$.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell’algoritmo del Simpleso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Si osservi che c e A_3 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base \bar{x} e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Alla fine, se l’algoritmo termina con esito ottimo finito, si discuta l’unicità delle soluzioni ottime determinate, sia primale che duale.

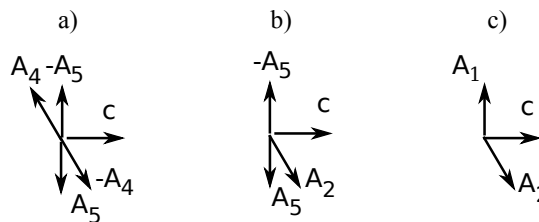


SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{4, 5\}$, $\bar{y}_4 < 0$ e $\bar{y}_5 < 0$ poiché c appartiene (è interno) al cono generato da $-A_4$ e $-A_5$, come mostrato in a); quindi $h = 4$ per la regola anticiclo di Bland. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 2, quindi $k = 2$.

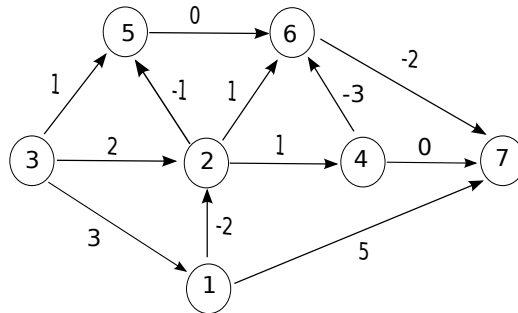
it. 2) $B = \{2, 5\}$, $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 ed $-A_5$, come mostrato in b); quindi, $h = 5$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei due vincoli 1 e 3: quindi $k = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3) $B = \{1, 2\}$, $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e A_2 , come mostrato in c); quindi l’algoritmo termina avendo individuato in \bar{x}^3 una soluzione ottima del problema primale.



La soluzione ottima primale individuata è unica, come si può verificare per via geometrica. Per discutere l’unicità della soluzione ottima duale osserviamo che la soluzione ottima primale è degenere. In particolare, anche le basi $B' = \{1, 3\}$ e $B'' = \{2, 3\}$ inducono la soluzione di base primale \bar{x}_3 , e sono duali ammissibili (si noti che esse inducono la stessa soluzione di base duale). Tale soluzione duale è quindi anch’essa ottima, ed è diversa da quella corrispondente alla base B perché in quest’ultima $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ (c è interno al cono generato da A_1 ed A_2), mentre nella soluzione duale corrispondente a B' e a B'' sia la prima che la seconda componente sono nulle, essendo c collineare ad A_3 . Pertanto la soluzione ottima duale non è unica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura, utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato. Si discuta infine se l’albero individuato sia l’unico albero dei cammini minimi di radice 3.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

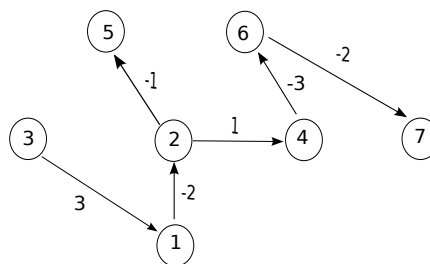
originale	1	2	3	4	5	6	7
rinumerato	2	3	1	4	5	6	7

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. Si noti che tale rinumerazione non è unica, in quanto la numerazione dei nodi 4 e 5 potrebbe essere invertita. L’algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$$

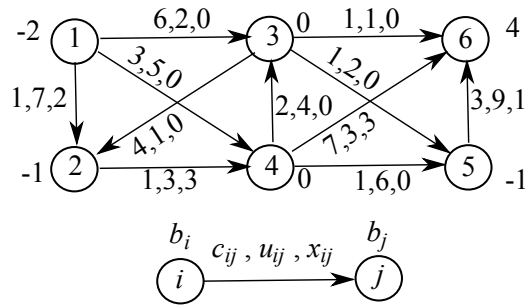
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
0		nil	1	1	1	1	1	1	0	31	31	31	31	31	31
1	1	nil	1	1	1	1	1	1	0	3	2	31	1	31	31
2	2	nil	1	2	1	1	1	2	0	3	1	31	1	31	8
3	3	nil	1	2	3	3	3	2	0	3	1	2	0	2	8
4	4	nil	1	2	3	3	4	4	0	3	1	2	0	-1	2
5	5	nil	1	2	3	3	4	4	0	3	1	2	0	-1	2
6	6	nil	1	2	3	3	4	6	0	3	1	2	0	-1	-3

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):



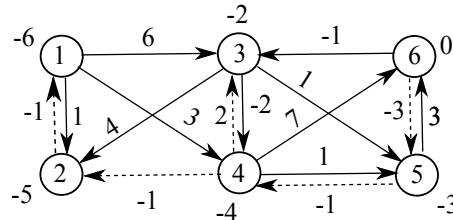
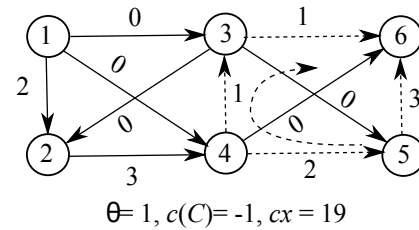
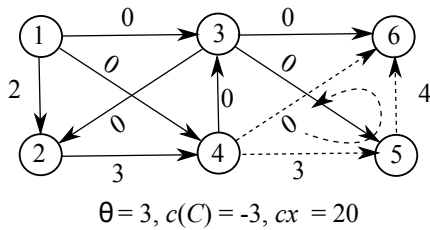
L’albero individuato è unico. Infatti, ogni arco non appartenente all’albero soddisfa le condizioni di Bellman in forma di stretta disuguaglianza.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 29$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il relativo costo. Il flusso di costo minimo determinato è l'unica soluzione ottima del problema? Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

L'algoritmo esegue due iterazioni, illustrate dalle prime due figure in alto (da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ , nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C , con il relativo costo cx . La terza figura, in basso al centro, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x , che è quindi un flusso di costo minimo.



Il flusso di costo minimo determinato è l'unica soluzione ottima del problema in quanto nessun arco al di fuori dell'albero dei cammini minimi (con l'eccezione degli archi opposti a quelli dell'albero, se esistono), rispetta all'uguaglianza le condizioni di Bellman. Ovvero, i cicli aumentanti rispetto a tale flusso hanno tutti costo positivo.

5) Data la coppia asimmetrica di problemi di PL:

$$(P) \max\{cx : Ax \leq b\} \text{ e } (D) \min\{yb : yA = c, y \geq 0\},$$

si specifichi qual è la direzione d implicitamente considerata in ogni iterazione dell'algoritmo del Simpleso Duale, e si dimostri che d è una direzione di decrescita per (D) . Si indichi inoltre qual è il massimo passo di spostamento lungo d , dimostrando quanto asserito.

SVOLGIMENTO In ogni iterazione, data la base duale ammissibile corrente B , l'algoritmo del Simpleso Duale calcola la corrispondente coppia di soluzioni di base \bar{x} e \bar{y} (con $\bar{y} \geq 0$). Se anche \bar{x} è ammissibile, cioè se $A_N \bar{x} \leq b_N$, l'algoritmo termina, avendo individuato una coppia di soluzioni ottime. Altrimenti, cioè se esiste un indice $k \in N$ tale che $A_k \bar{x} > b_k$, l'algoritmo determina una direzione d di decrescita per \bar{y} , definita nel seguente modo:

$$d_i = \begin{cases} -\eta_i & \text{se } i \in B \\ 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\eta_B = A_k A_B^{-1}$.

Per verificare che d sia una direzione di decrescita, consideriamo la soluzione duale parametrica $y(\theta) = \bar{y} + \theta d$, che si ottiene spostandosi da \bar{y} lungo d di un passo $\theta \geq 0$. Per ogni $\theta > 0$ si ha

$$y(\theta)b = (\bar{y}_B - \theta\eta_B)b_B + \theta b_k = \bar{y}_B b_B + \theta(b_k - A_k A_B^{-1} b_B) = \bar{y}b + \theta(b_k - A_k \bar{x}) < \bar{y}b$$

essendo $A_k \bar{x} > b_k$. Quindi d è una direzione di decrescita.

Per quanto riguarda il massimo passo di spostamento lungo d , va individuato il massimo valore di θ per cui $y(\theta)$ risulti essere duale ammissibile. È facile verificare che $y(\theta)A = c$ per qualsiasi scelta di θ , in quanto

$$y(\theta)A = (\bar{y}_B - \theta\eta_B)A_B + \theta A_k = \bar{y}_B A_B + \theta(A_k - A_k) = \bar{y}_B A_B = c .$$

Considerando invece i vincoli di non negatività, ovvero $y(\theta) = \bar{y} + \theta d \geq 0$, gli indici critici sono quelli in B , dovendo essere $(\bar{y}_B - \theta\eta_B) \geq 0$ (infatti, $\bar{y}_k + \theta \geq 0$ per ogni $\theta \geq 0$).

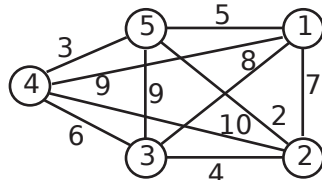
In particolare, se $\eta_B \leq 0$, allora l'ammissibilità di $y(\theta)$ è assicurata per qualsiasi $\theta > 0$: essendo d una direzione di decrescita, segue che (D) è illimitato, e conseguentemente (P) è vuoto. Se invece esiste almeno un indice $i \in B$ per cui $\eta_i > 0$, il massimo passo di spostamento lungo d è

$$\bar{\theta} = \min \{ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B, \eta_i > 0 \}.$$

In particolare, se $\bar{\theta} > 0$, allora d è una direzione di decrescita ammissibile. Altrimenti, ovvero $\bar{\theta} = 0$, allora d non è ammissibile, e l'algoritmo esegue un cambio di base duale degenere.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il minor valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r - 1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, e si inseriscano in coda i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di lati fissati a zero (ad esempio, se il nodo selezionato è 2, e vengono creati due figli fissando a 0 la variabile dei lati (2,3) e (2,4), rispettivamente, il figlio ottenuto fissando $x_{23} = 0$ va inserito prima di quello ottenuto fissando $x_{24} = 0$).

Per ogni nodo dell'albero si riporti la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching, oppure se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 7 nodi dell'albero delle decisioni (incluso il nodo radice). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichino la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile al momento della terminazione, e il gap relativo corrispondente, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con \underline{z} la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

Nodo radice L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (a). Poichè non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 20 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e creare $3(3 - 1)/2 = 3$ figli, fissando a zero rispettivamente i lati (5, 1), (5, 2) e (5, 4). I figli vengono inseriti in Q in quest'ordine.

$x_{51} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 22$, è mostrato in (b). Poichè $\underline{z} = 22 < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e creare tre figli, fissando a zero rispettivamente i lati (2, 1), (2, 3) e (2, 5). I figli vengono inseriti in Q in quest'ordine.

$x_{52} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 25$, è mostrato in (c). Poichè è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 25$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$x_{54} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 24$, è mostrato in (d). Poichè $\underline{z} = 24 < z = 25$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli, fissando a zero rispettivamente i lati (2, 1), (2, 3) e (2, 5). I figli vengono inseriti in Q in quest'ordine.

$x_{51} = x_{21} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 23$, è mostrato in (e). Poichè $\underline{z} = 23 < z = 25$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre lati incidenti, e creare tre figli, fissando a zero rispettivamente i lati (3, 1), (3, 2) e (3, 4). I figli vengono inseriti in Q in quest'ordine.

$x_{51} = x_{23} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 26$, è mostrato in (f). Poichè è un ciclo Hamiltoniano, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione inferiore. Poichè $\bar{z} = 26 > z = 25$, z non cambia.

$x_{51} = x_{25} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 28$, è mostrato in (g). Poichè $\underline{z} = 28 > z = 25$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

Poiché il massimo numero di nodi è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che la valutazione inferiore globale è pari a $\min\{z, \min\{\underline{z}(P') : P' \in Q'\}\}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q . In questo caso Q' contiene il nodo $x_{54} = 0$, che ha una valutazione inferiore pari a 24, ed il nodo $x_{51} = x_{21} = 0$ che ha una valutazione inferiore di 23. Pertanto la miglior valutazione inferiore disponibile è 23, ed il gap relativo a terminazione è $(25 - 23)/23 \approx 8.7\%$.

