RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & & & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 4, 6\ \} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = \min\{2, 0\} = 0, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 5$$

it. 2) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = 6,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = 0, \quad h = 4$$

it. 3) $B = \{1, 6\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \bar{\theta} = 2, \quad h = 1$$

$$\text{it. 4) } B=\{3,6\}\text{: } A_B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad A_B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad \bar{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix},\quad \bar{y}_N=0,\quad \bar{y}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_N\bar{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}\le b_N=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \mathit{STOP}.$$

$B=\{3,6\}$ è una base ottima: $\bar{x}=(-1,-4)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y}=(0,0,2,0,0,4)$ è una soluzione ottima per il problema duale. L'insieme delle soluzioni ottime del problema duale è dato dall'insieme delle soluzioni del Duale Ristretto associato a $\bar{x}$, ovvero dall'insieme delle soluzioni duali ammissibili in scarti complementari con $\bar{x}$. Poiché $I(\bar{x})=\{2,3,6\}$ (la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è infatti degenere), il Duale Ristretto risulta essere:

$$(DR)\quad \begin{cases} -y_2 - 2y_3 + y_6 = 0 \\ -y_2 + y_3 = 2 \\ y_2,\ y_3,\ y_6 \ge 0 \end{cases}$$

Posto $y_6=\alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $((\alpha-4)/3,(\alpha+2)/3,\alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per (DR) per ogni $\alpha\ge 4$. Pertanto, $y(\alpha)=(0,(\alpha-4)/3,(\alpha+2)/3,0,0,\alpha)$, $\alpha\ge 4$, è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale.

2) Si consideri il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

e la corrispondente soluzione $\bar{x} = [3, 3]$. Utilizzando il teorema degli scarti complementari si verifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione ottima, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è

$$\begin{array}{rrrrrcr} \min & -4y_1 & +4y_2 & +6y_3 & +4y_4 & & \\ & -y_1 & +y_2 & +y_3 & & = & 2 \\ & -y_1 & & +y_3 & +y_4 & = & -1 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq & 0 \end{array} .$$

$\bar{x}$ è ammissibile in quanto

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = b \, .$$

Dal teorema degli scarti complementari, $\bar{x}$ è ottima per il primale se e solo se esiste una soluzione ammissibile duale, $\bar{y}$, tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfano le condizioni degli scarti complementari:

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0.$$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

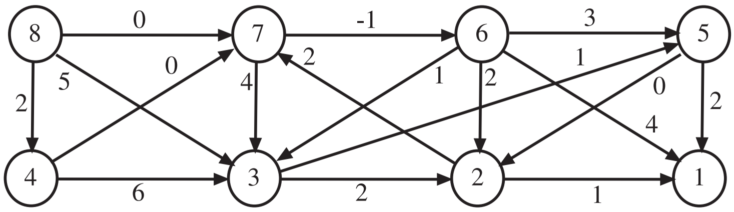
$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \ .$$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I = I(\bar{x}) = \{\, i \ : \ A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{3\}$ (si noti che, di conseguenza, $\bar{x}$ non è una soluzione di base). Dalle condizioni degli scarti complementari segue pertanto che, affinché $\bar{x}$ sia ottima, deve valere $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_4 = 0$ in qualsiasi soluzione ammissibile duale che sia in scarti complementari con $\bar{x}$. Ma imponendo tali condizioni seguirebbe che in qualsiasi soluzione ammissibile duale $\bar{y}$, che sia in scarti complementari con $\bar{x}$, dovrebbe valere

$$\begin{array}{ll} \bar{y}_3 & = 2 \\ \bar{y}_3 & = -1 \\ \bar{y}_3 & \geq 0 \end{array}$$

che è impossibile. Non esiste quindi nessuna soluzione duale ammissibile in scarti complementari con $\bar{x}$, che pertanto non può essere soluzione ottima per il primale.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q; durante l'algoritmo, si visitino gli archi della stella uscente di u in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione trovata è unica? Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

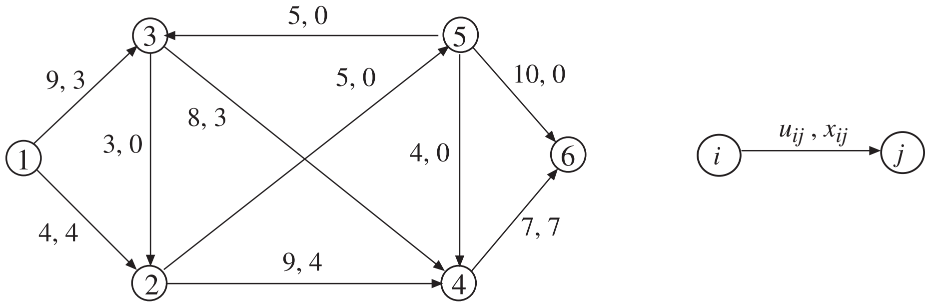
Non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo $(7, 3, 2)$), ed essendo presenti archi di costo negativo (si consideri ad esempio l'arco $(7, 6)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 7 \times 6 + 1 = 43.$

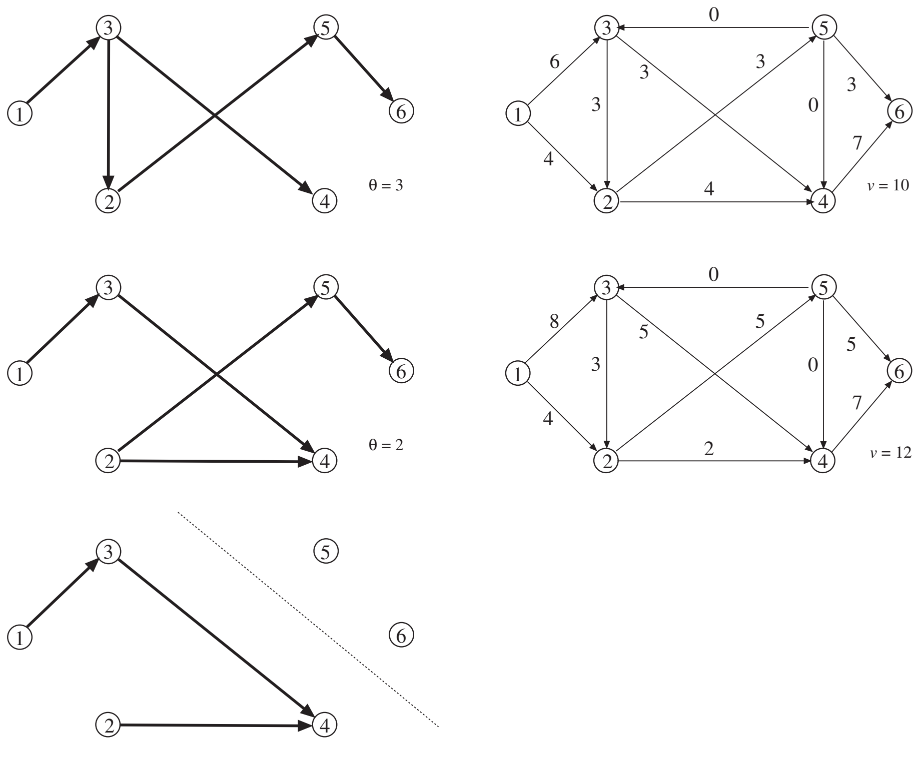
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$	Q
0		4	4	4	*nil*	4	4	4	4	43	43	43	0	43	43	43	43	$\{4\}$
1	4	4	4	4	*nil*	4	4	4	4	43	43	6	0	43	43	0	43	$\{3, 7\}$
2	3	4	3	4	*nil*	3	4	4	4	43	8	6	0	7	43	0	43	$\{7, 2, 5\}$
3	7	4	3	7	*nil*	3	7	4	4	43	8	4	0	7	-1	0	43	$\{2, 5, 3, 6\}$
4	2	2	3	7	*nil*	3	7	4	4	9	8	4	0	7	-1	0	43	$\{5, 3, 6, 1\}$
5	5	2	5	7	*nil*	3	7	4	4	9	7	4	0	7	-1	0	43	$\{3, 6, 1, 2\}$
6	3	2	3	7	*nil*	3	7	4	4	9	6	4	0	5	-1	0	43	$\{6, 1, 2, 5\}$
7	6	6	6	6	*nil*	6	7	4	4	3	1	0	0	2	-1	0	43	$\{1, 2, 5, 3\}$
8	1	6	6	6	*nil*	6	7	4	4	3	1	0	0	2	-1	0	43	$\{2, 5, 3\}$
9	2	2	6	6	*nil*	6	7	4	4	2	1	0	0	2	-1	0	43	$\{5, 3, 1\}$
10	5	2	6	6	*nil*	6	7	4	4	2	1	0	0	2	-1	0	43	$\{3, 1\}$
11	3	2	6	6	*nil*	3	7	4	4	2	1	0	0	1	-1	0	43	$\{1, 5\}$
12	1	2	6	6	*nil*	3	7	4	4	2	1	0	0	1	-1	0	43	$\{5\}$
13	5	2	6	6	*nil*	3	7	4	4	2	1	0	0	1	-1	0	43	$\emptyset$

Si noti che il nodo 8 non è raggiungibile da 4. Poiché le condizioni di Bellman, per alcuni archi non appartenenti all'albero, sono verificate in forma di uguaglianza, la soluzione ottima individuata potrebbe non essere unica. Infatti è possibile ottenere una soluzione ottima alternativa sostituendo, nella soluzione, l'arco $(6, 2)$ con l'arco $(5, 2)$, che rispetta le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza.

4) Si risolva il problema di flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, per l'istanza in figura, partendo dal flusso ammissibile x dato e utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Per ogni iterazione si riportino il flusso x, il suo valore v e l'albero della visita, indicando il cammino aumentante individuato e la sua capacità θ. Al termine si specifichi il taglio di capacità minima determinato dall'algoritmo con la relativa capacità. Durante la visita del grafo residuo, si esaminino gli archi della stella uscente del nodo visitato per ordine di nodo testa crescente. Come cambierebbero il flusso massimo e il taglio di capacità minima se si diminuisse la capacità dell'arco $(1, 3)$, rendendola pari a 8? Giustificare la risposta.

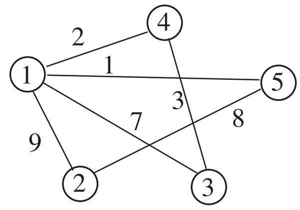


SVOLGIMENTO
Le iterazioni sono mostrate in figura: a sinistra è riportato l'albero della visita e viene specificata la capacità θ del cammino aumentante determinato, mentre a destra è illustrato il flusso x al termine dell'iterazione con il corrispondente valore v. Nella figura corrispondente all'ultima iterazione, la linea tratteggiata indica il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ di capacità minima individuato dall'algoritmo. Si ha $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 5 + 7 = 12$, pari al valore $v = 12$ del flusso massimo determinato.



Se la capacità dell'arco $(1, 3)$ fosse pari a 8, il flusso massimo x determinato non cambierebbe, in quanto tale flusso rispetta la capacità ridotta. Cambierebbe però il taglio di capacità minima individuato dall'algoritmo, in quanto i nodi 2, 3 e 4 non sarebbero raggiungibili nel corso dell'ultima procedura di visita. Si otterrebbe invece $(N_s, N_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$, con capacità $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{13} = 4 + 8 = 12$.

5) Si formuli il problema del Commesso Viaggiatore (TSP), relativamente all'istanza in figura, in termini di Programmazione Lineare Intera. Giustificare la correttezza della formulazione proposta.



SVOLGIMENTO

Introduciamo una variabile binaria per ogni arco presente nel grafo: x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{25} e x_{34}. Nel modello di Programmazione Lineare Intera, ognuna di tali variabili assume il valore 1 se l'arco corrispondente viene selezionato, e 0 altrimenti.

Utilizzando tali variabili decisionali, il problema del Commesso Viaggiatore (TSP) per l'istanza in questione, che consiste nel determinare un ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo dato, può allora essere formulato nel modo seguente:

$$
(\text{TSP}) \quad
\begin{array}{lll}
\min & 9x_{12} + 7x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + 8x_{25} + 3x_{34} & \\
& x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 2 & \\
& x_{12} + x_{25} = 2 & \\
& x_{13} + x_{34} = 2 & \\
& x_{14} + x_{34} = 2 & \\
& x_{15} + x_{25} = 2 & \\
& \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1 & \emptyset \subset S \subset \{1,2,3,4,5\} \\
& x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{25}, x_{34} \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

ll primo blocco di vincoli, uno per nodo, impone che, considerando gli archi (i,j) selezionati, ovvero tali che $x_{ij} = 1$, in ogni nodo del grafo incidano esattamente due archi. Tali vincoli (detti di copertura per cicli) assicurano la copertura dei nodi del grafo mediante una collezione di cicli, ma non garantiscono che la copertura avvenga mediante un ciclo unico.

Il successivo blocco di vincoli (vincoli di connessione) impone che il sottoinsieme di archi selezionati formi una struttura connessa, e di conseguenza garantisce che la copertura dei nodi del grafo avvenga mediante un unico ciclo, ovvero mediante un ciclo Hamiltoniano. Poiché la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il costo totale degli archi selezionati, il modello presentato correttamente formula il problema di determinare un ciclo Hamiltoniano di costo minimo (TSP) per l'istanza in figura.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} \max & 3x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +10x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 18$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 16$. Poiché $\underline{z} = 16 > z = -\infty$, $z = 16$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 12 + 1/3$. Siccome $\bar{z} < z = 16$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 16$. Poiché $\underline{z} = 16 = z = 16$, z non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 15$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 15 < z = 16$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [2/3, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 16$. Siccome $\bar{z} = 17 > z = 16$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

Poiché il massimo numero di livelli dell'albero è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione superiore globale è pari a $\max\{\ z\ ,\ \max\ \{\ \bar{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il solo nodo $x_3 = x_2 = 0$: pertanto $\bar{z} = 17$, e siccome $z = 16$ il gap relativo a terminazione è $(17 - 16)/16 = 1/16 = 6.25\%$. In effetti con semplici argomentazioni è facile dimostrare che il valore $z = 16$ è ottimo per il problema, e che quindi l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima.