RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & & & \leq & -4 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo non finito, qual è la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1,2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 4, 5\ \} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 2$$

it. 2) $B = \{1,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 3, \quad h = 1$$

it. 3) $B = \{4,5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\ 2, 3\ \} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \textit{STOP.}$$

Poichè $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto. La direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo è $d = [0\ 1\ 0\ -\eta_B]$; infatti, l'algoritmo sceglie un vettore d i cui elementi sono 0 in corrispondenza degli indici non in base salvo $k = 2$, per cui $d(k) = 1$, e i cui elementi corrispondenti agli indici in base sono gli elementi del vettore $-\eta_B$. Quindi $d = [0\ 1\ 0\ 0\ 1]$.

2) Si consideri il seguente problema di P.L., parametrico in $\alpha \in \Re$:

$$
(P_\alpha) \qquad \begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & \alpha x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Si determini per quali valori di α la soluzione di base duale associata alla base $B = \{1, 2\}$ sia ottima per il problema duale, discutendo l'unicità di tale soluzione al variare di α. Per quali valori di α il problema (P_α) potrebbe essere superiormente illimitato? Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo la matrice di base associata a $B = \{1, 2\}$ e la sua inversa:

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale associata a B è quindi data da:

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo $\bar{y}$ non degenere, $\bar{y}$ è ottima se e solo se la corrispondente soluzione di base primale, ovvero:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

è ammissibile per (P_α). Ciò si verifica se e solo se $2\alpha + 3 \leq 5$, ossia se e solo se $\alpha \leq 1$.

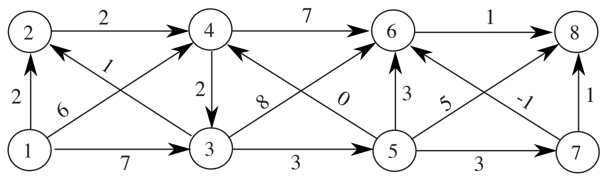
Per discutere l'unicità della soluzione ottima $\bar{y}$ distinguiamo due casi:

1. $\alpha < 1$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base (ottima) non degenere, e pertanto $\bar{y}$ è l'unica soluzione duale ammissibile in scarti complementari con essa; segue che $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima duale;

2. $\alpha = 1$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base (ottima) degenere, in quanto $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$, e quindi potrebbero esistere altre soluzioni duali ammissibili in scarti complementari con $\bar{x}$ (oltre a $\bar{y}$); imponendo tali condizioni, ad esempio, si ricava che la soluzione di base duale ammissibile $y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, ed è quindi una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

Infine (P_α) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α. Infatti, il problema duale ammette la soluzione ammissibile $\bar{y}$ con valore della funzione obiettivo duale pari a $\bar{y}b = 5$, con $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ovvero indipendente da α. Dal Teorema debole della dualità segue che la funzione obiettivo di (P_α) è superiormente limitata dal valore 5.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Si esaminino gli archi della stella uscente in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



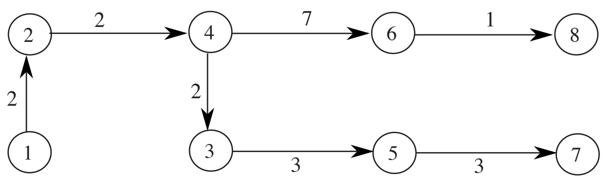
SVOLGIMENTO

Poiché il grafo presenta cicli (es. $(2, 4, 3, 2)$) ed archi di costo negativo, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta essere SPT.L.Queue, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 8 \times 7 + 1 = 57.$$

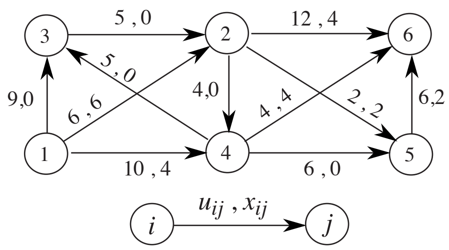
		$p[\cdot]$								$d[\cdot]$								
it.	u	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	Q
0		0	1	1	1	1	1	1	1	0	57	57	57	57	57	57	57	$\{1\}$
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	2	7	6	57	57	57	57	$\{2,3,4\}$
2	2	0	1	1	2	1	1	1	1	0	2	7	4	57	57	57	57	$\{3,4\}$
3	3	0	1	1	2	3	3	1	1	0	2	7	4	10	15	57	57	$\{4,5,6\}$
4	4	0	1	4	2	3	4	1	1	0	2	6	4	10	11	57	57	$\{5,6,3\}$
5	5	0	1	4	2	3	4	5	5	0	2	6	4	10	11	13	15	$\{6,3,7,8\}$
6	6	0	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	10	11	13	12	$\{3,7,8\}$
7	3	0	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	13	12	$\{7,8,5\}$
8	7	0	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	13	12	$\{8,5\}$
9	8	0	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	13	12	$\{5\}$
10	5	0	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	12	12	$\{7\}$
11	7	0	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	12	12	$\emptyset$

Albero dei cammini minimi individuato:



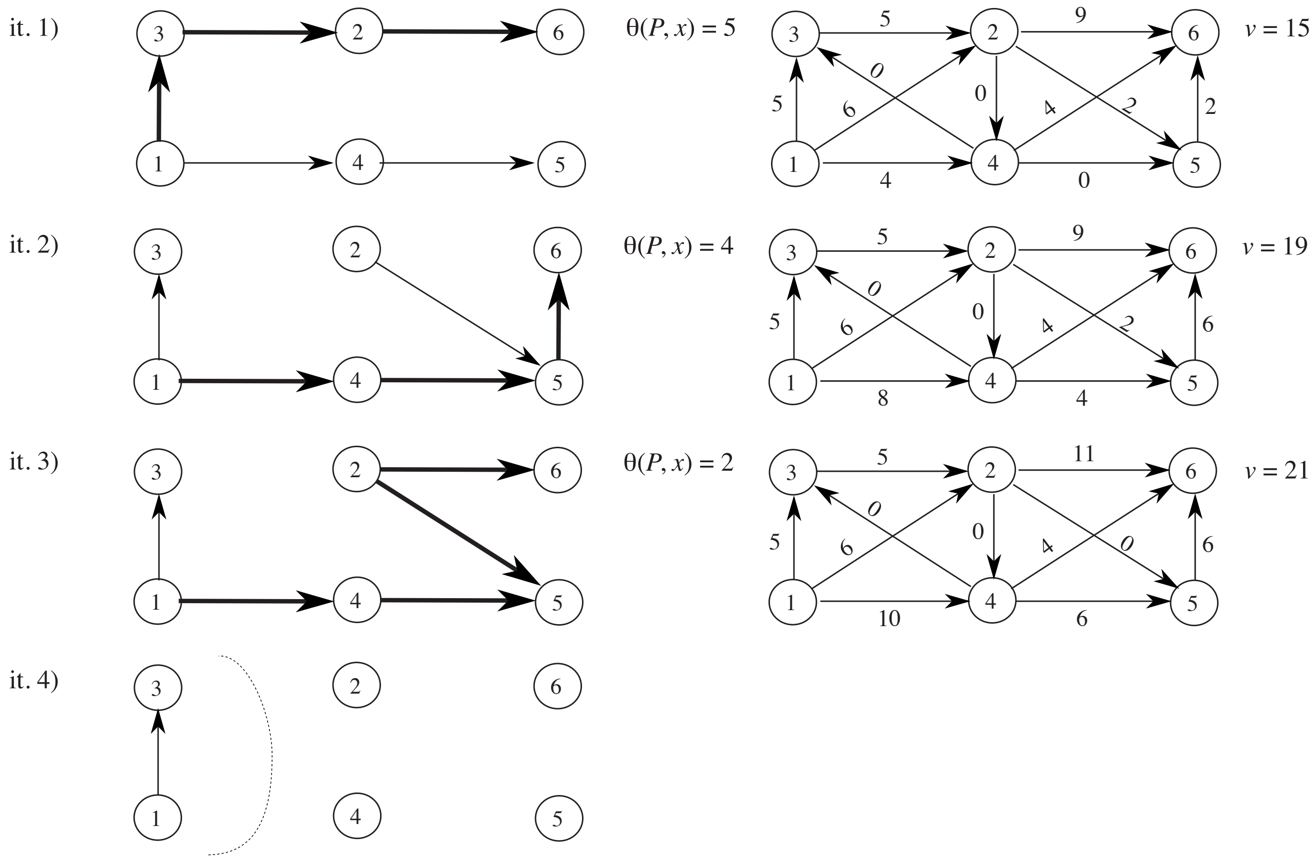
La soluzione ottima non è unica. Infatti l'arco $(7, 6)$ rispetta le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza: $d[6] = 11 = d[7] + c_{76} = 12 + (-1)$. Rimuovendo dall'albero ottenuto l'arco $(p[6], 6) = (4, 6)$, e sostituendolo con l'arco $(7, 6)$, si ottiene un diverso albero dei cammini minimi.

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 10$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine l'unicità del taglio di capacità minima determinato.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} + u_{32} = 6 + 10 + 5 = 21 = v$.



Il taglio determinato non è l'unico di capacità minima. Infatti, anche il taglio $(N'_s, N'_t) = (\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6\})$ ha capacità $u(N'_s, N'_t) = u_{12} + u_{32} + u_{45} + u_{46} = 6 + 5 + 6 + 4 = 16 = 21 = v$.

5) Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, si riformuli il seguente modello matematico

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{\, 3x_1 - x_2 \,,\, x_1 + x_2 \,\} \\ & x_1 \in \{0,1\} \\ & 0 \le x_2 \le 100 \\ & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 100 \end{array}$$

come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (ma è definita come il massimo di due funzioni lineari);
- è presente un'implicazione logica che lega la variabile x_2 al valore assunto dalla variabili binaria x_1.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$\min z \tag{1}$$
$$z \ge 3x_1 - x_2 \tag{2}$$
$$z \ge x_1 + x_2 \tag{3}$$
$$x_1 \in \{0,1\} \tag{4}$$
$$0 \le x_2 \le 100 \tag{5}$$
$$x_2 \ge 100(1 - x_1) \tag{6}$$

Per via dei vincoli (2) e (3), la variabile di soglia z stima per eccesso il massimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $3x_1 - x_2$ e $x_1 + x_2$. Minimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1 e x_2 quei valori (ammissibili) che minimizzano il massimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Inoltre, il vincolo (6) garantisce che, se $x_1 = 0$, allora la variabile x_2 debba assumere valori ≥ 100, e quindi sia forzata al valore 100 grazie al vincolo di upper bound (5) (si noti che il vincolo di non negatività in (5) risulta ora ridondante, e potrebbe essere eliminato).

Il modello (1)-(6) rappresenta quindi una formulazione del modello matematico proposto in termini di PLI.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} \max & 1x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & +3x_6 & & \\ & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +3x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_6, x_1$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 > z = -\infty$, $z = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 12$. Siccome $\bar{z} < z = 15$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 16 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 = z = 15$, z non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 14$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità (senza bisogno di eseguire l'euristica). Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 14 \leq z = 15$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [0, 0, 0, 1, 1, 2/3]$, $\bar{z} = 16$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Siccome $\bar{z} = 16 > z = 15$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

Poiché il massimo numero di livelli dell'albero è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione superiore globale è pari a $\max\{\ z\ ,\ \max\ \{\ \bar{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il solo nodo $x_3 = x_2 = 0$: pertanto $\bar{z} = 16$, e siccome $z = 15$ il gap relativo a terminazione è $(16 - 15)/15 = 1/15 = 6.\bar{6}\%$. In effetti con semplici argomentazioni è facile dimostrare che il valore $z = 15$ è ottimo per il problema, e che quindi l'algoritmo ha determinato la soluzione ottima.