Il problema di flusso di costo minimo

1

- $G = (N, A)$ rete di flusso
- c_{ij}, $\forall (i,j) \in A$ costo di (i,j)
- $u_{ij} > 0$, $\forall (i,j) \in A$ capacità superiore di (i,j)
- b_i, $\forall i \in N$ bilancio del nodo i

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ &\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i, \quad i \in N \\ &0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j) \in A \end{aligned}}$$

Studiamo condizioni di ottimalità per il problema: dato un flusso ammissibile x, x è ottimo? (ovvero: è di costo minimo?)

Sia $G_x = (N, A_x)$ il grafo residuo rispetto a x, definito come per il problema di flusso massimo:

$\forall (i,j) \in A$ t.c. $x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i,j) \in A_x$ $\quad c'_{ij} = c_{ij}$

$\forall (i,j) \in A$ t.c. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (j,i) \in A_x$ $\quad c'_{ji} = -c_{ij}$

NB: G_x è ora pesato, in quanto ai suoi archi è associato un costo di percorrenza

Un ciclo aumentante è un ciclo orientato in G_x.

La massima quantità di flusso inviabile lungo un ciclo aumentante C è:

$$\theta(C, x) = \min \{ (u_{ij} - x_{ij}) : (i,j) \in C^+, \; x_{ij} : (i,j) \in C^- \}$$

con:

C^+: archi diretti del ciclo (in G)

C^-: archi inversi del ciclo (in G)

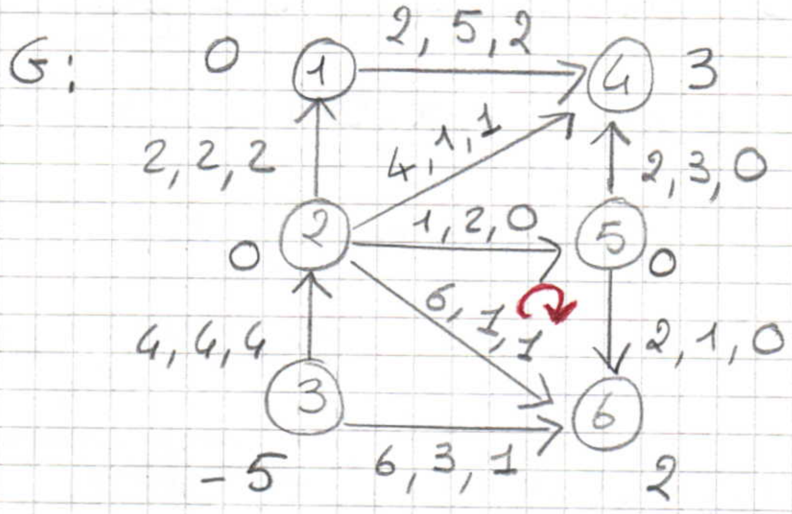
< considerando l'orientamento dato dal verso di percorrenza in G_x >

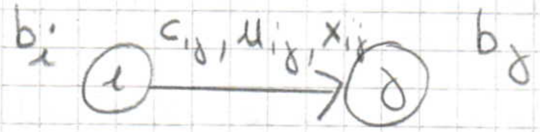
Proprietà: Se x è un flusso ammissibile e C è un ciclo in G_x (ciclo aumentante),

$$x(\theta) = x \oplus \theta C \quad , \quad 0 \le \theta \le \theta(C, x)$$

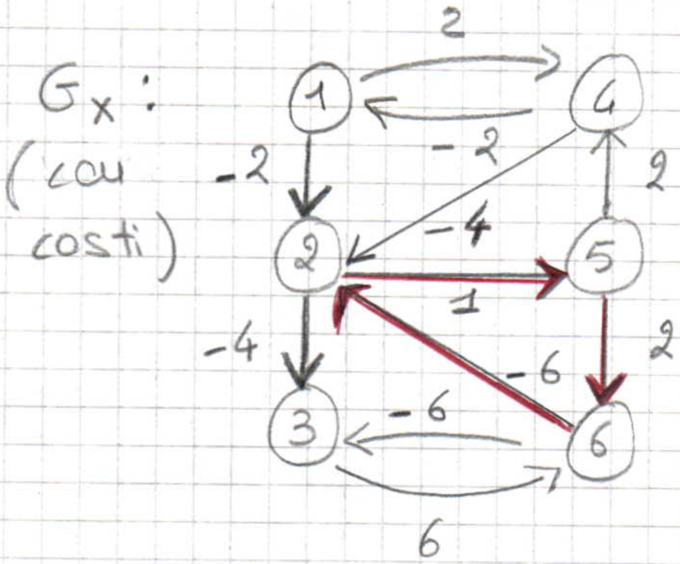
è ancora un flusso ammissibile $\square$

Esempio

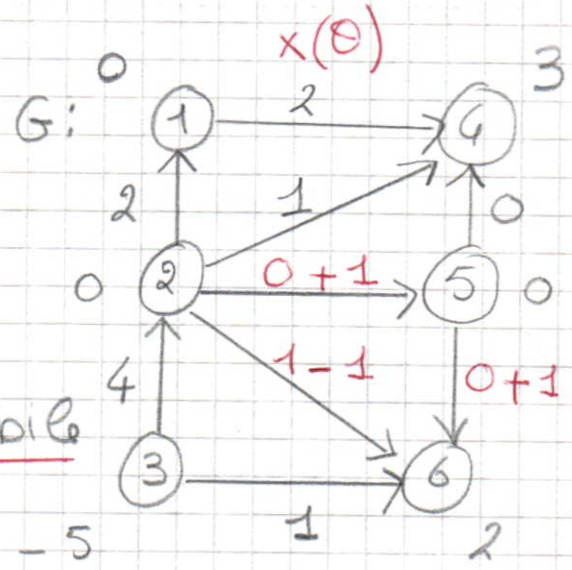




$$cx = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} = 40$$



$\Rightarrow$ $x(\theta)$ è ammissibile



ciclo aumentante C

$$\theta(C, x) = \min\{2, 1, 1\} = 1 = \theta$$

Qual è il costo di $x(\theta)$?

Se $c(C) = \sum_{(i,j)\in C^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)C^-} c_{ij}$ <u>è il costo di C</u>

(ovvero è la somma dei costi degli archi in G_x), allora:

$$cx(\theta) = c(x \oplus \theta C) = cx + \theta c(C)$$

<u>Quindi</u>: se $c(C) < 0$, ovvero C è un <u>ciclo aumentante negativo</u>, allora $cx(\theta) < cx$, e pertanto x <u>non</u> è un flusso di costo minimo.

<u>Condizione necessaria per l'ottimalità di un flusso ammissibile x</u>: non devono esistere cicli aumentanti negativi in G_x

<u>Esempio</u>

$c(C) = -3$, quindi x <u>non</u> è un flusso di costo minimo.

Infatti $cx(\theta) = cx + \theta c(C) = 40 + 1(-3)$
$= 37$