RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

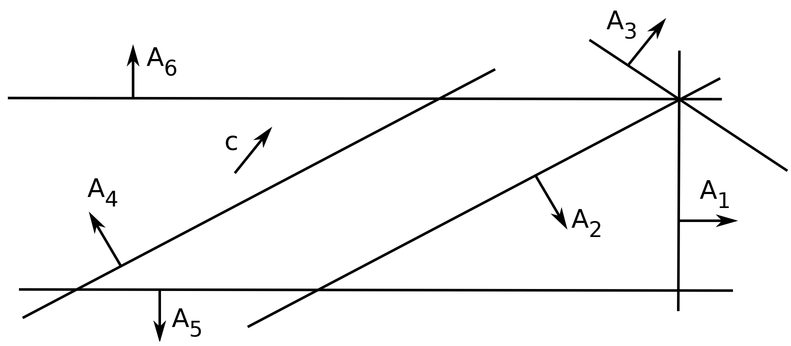
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

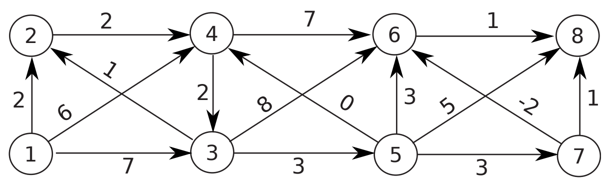
$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso $\bar{x}$ sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

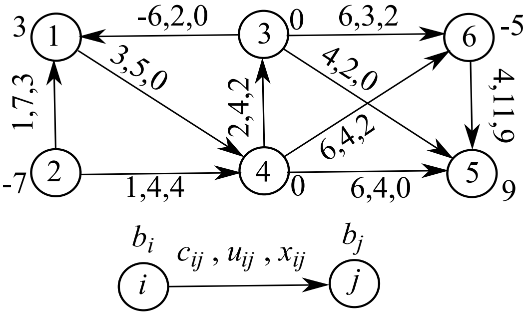
2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Si osservi che c e A_3 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Alla fine, se l'algoritmo termina con esito ottimo finito, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia primale che duale.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si indichino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Si esaminino gli archi della stella uscente in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo per l'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 71$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.



5) Si consideri un problema di ottimizzazione della forma

$$(P) \qquad z(P) = \min \{\ c(x)\ :\ x \in F\ \}. \tag{1}$$

Si consideri inoltre il problema

$$(\bar{P}) \qquad z(\bar{P}) = \min \{\ \bar{c}(x)\ :\ x \in \bar{F}\ \}. \tag{2}$$

Si specifichi quali proprietà deve soddisfare $(\bar{P})$ per poter essere definito un rilassamento del problema (P). Data una soluzione ottima x^* di $(\bar{P})$, si indichino inoltre condizioni che garantiscono che x^* sia pure soluzione ottima di (P), dimostrando quanto affermato.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcl}
\max & 13x_1 & +9x_2 & +10x_3 & +7x_4 & +4x_5 & +3x_6 & & \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.