

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -4x_1 + 2x_2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & x_1 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 4
 \end{aligned}$$

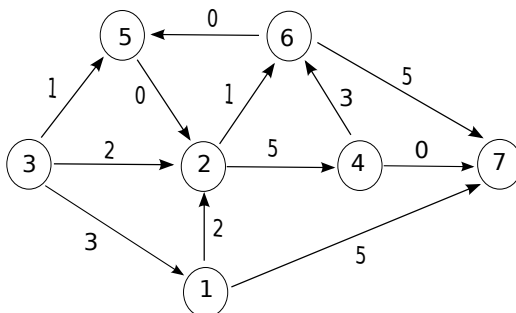
applicando l’algoritmo del Simpleso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l’indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l’indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato. Si consideri, inoltre, l’ultima direzione ξ individuata dall’algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[0, 2]$ invece che $[-4, 2]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

2) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l’algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l’indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l’indice uscente h , giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si individui l’insieme delle soluzioni ottime primali; *ii*) si discuta se la soluzione $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ sia una soluzione duale ottima alternativa a quella individuata dall’algoritmo. Giustificare le risposte.

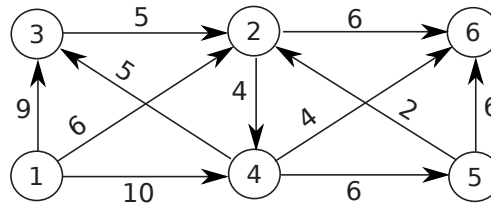
$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 + x_2 \leq -2 \\
 & -x_1 - x_2 \leq -2
 \end{aligned}$$

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell’arco $(4, 7)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l’albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3? E per quali valori di ϵ tale albero sarebbe l’unico albero dei cammini minimi di radice 3? Giustificare le risposte.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo sorgente 1 al nodo destinazione 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se l'arco (1,3) venisse cancellato dalla rete? Giustificare le risposte.



5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{aligned} \max \quad & \min\{2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 4x_2 - 2x_3\} \\ & x_1 \in \{0, 1\} \\ & x_2 \in \{3, 8, 11\} \\ & x_1 = 1 \Rightarrow x_3 \in [10, 15] \\ & x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0. \end{aligned}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli in termini di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 14 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima anche nel caso di capacità dello zaino pari a 13, giustificando la risposta.