RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

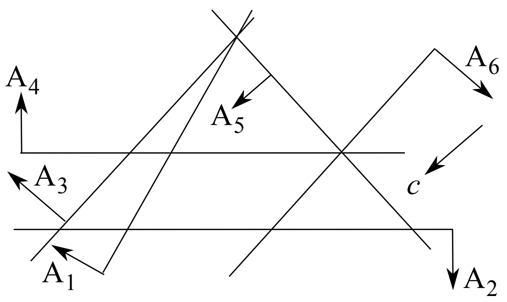
$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[2, 0]$ invece che $[2, -4]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

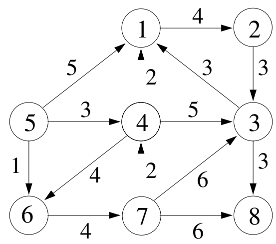
2) Si consideri il problema di *PL* riportato a lato, parametrico in ε: *i*) si individui l'insieme di tutti i valori di ε per cui la base $B = \{3, 4\}$ è ottima; *ii*) si risolva il problema dato, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$, per $\varepsilon < -2$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso appropriato. Giustificare algebricamente le risposte date.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & \varepsilon \end{array}$$

3) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Duale, il problema di *PL* in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$; si noti che c è collineare ad A_5 e perpendicolare ad A_3 e A_6, che sono collineari; anche A_2 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottime, giustificando la risposta fornita.



4) Si consideri la rete di flusso in figura, in cui 5 è l'unico nodo sorgente, 8 l'unico nodo destinazione, e gli altri nodi sono pertanto di transito. Per tale rete di flusso si risolva il seguente problema decisionale: il nodo sorgente è in grado di inviare al nodo destinazione 10 unità di flusso? Giustificare la risposta.



5) Si consideri la seguente variante del problema di cammino minimo vincolato. Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, ai cui archi è associato sia un costo di utilizzo c_{ij} che un tempo di percorrenza t_{ij}, per ogni $(i, j) \in A$, si vuole individuare un cammino di costo minimo, dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$, tale che il tempo totale di viaggio non ecceda la soglia temporale T, e con l'ulteriore requisito che il cammino visiti almeno k nodi appartenenti al sottoinsieme V di N, in quanto nodi di particolare valore strategico. Si formuli il problema in termini di Programmazione Lineare Intera (PLI), giustificando le scelte modellistiche effettuate.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda, e si inseriscano in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio, se si seleziona il nodo 1, $(1, 2)$ è inserito prima di $(1, 3)$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (inclusa la radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si indichino la migliore valutazione inferiore e superiore disponibili al termine (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.