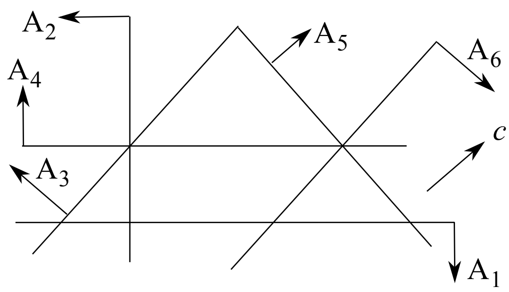
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

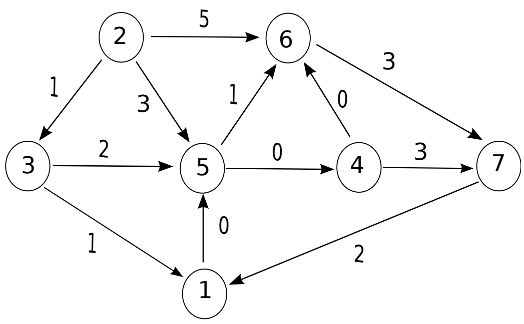
1) Si risolva il seguente problema di PL applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima duale sia unica, giustificando la risposta.

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2
\end{array}
$$

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che c è collineare ad A_5 e perpendicolare ad A_3 ed A_6, che sono collineari; inoltre anche A_1 ed A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, gli indici uscente ed entrante, e la degenerazione primale e duale, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima determinata, sia primale che duale.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura.



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell'arco $(4, 6)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di ϵ l'albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.

4) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{array}{ll}
\max & \min\{\, 4x_1 - x_2 \,,\, x_1 + x_2 - x_3 \,\} \\
 & x_1, x_3 \in \{0,1\} \\
 & x_1 = 1 \Longrightarrow 5 \leq x_2 \leq 11 \\
 & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\
 & x_1 = 1 \textit{ and } x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 8
\end{array}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

5) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
\max & 6x_1 & +11x_2 & +5x_3 & +5x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\
 & 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 16 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima anche nel caso di capacità dello zaino pari a 15, giustificando la risposta.

6) Si enuncino e si dimostrino le condizioni di ottimalità per il problema di Flusso di Costo Minimo (*suggerimento*: si utilizzi, senza dimostrarlo, il Teorema di Decomposizione dei flussi).