

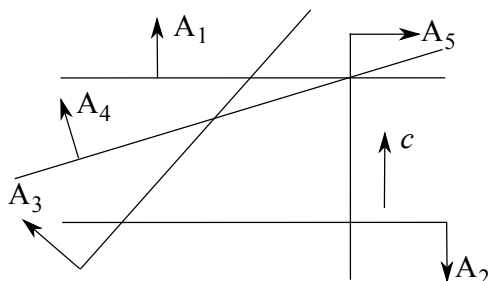
# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome:

Cognome:

Matricola:

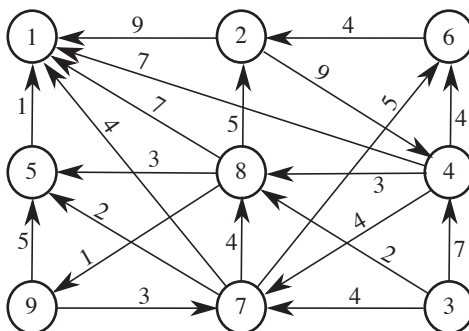
1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell’algoritmo del Simpleso Primale, il problema di  $PL$  in figura a partire dalla base  $B = \{2, 3\}$ ; si noti che  $c$  è collineare ad  $A_1$  e ad  $A_2$  e perpendicolare ad  $A_5$ . Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base  $x$  e la direzione di spostamento  $\xi$  (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall’algoritmo. Al termine, se l’algoritmo ha determinato una soluzione ottima si discuta l’unicità delle soluzioni ottime primale e duale del problema.



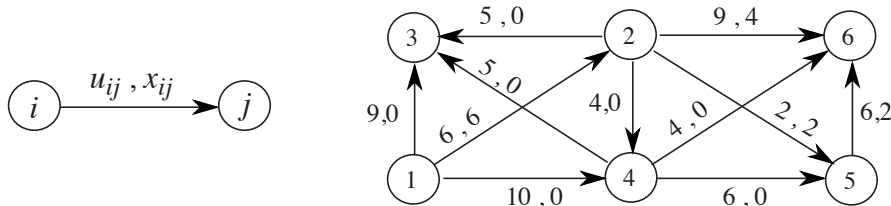
2) Si risolva il seguente problema di  $PL$  applicando l’algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base  $B = \{1, 3\}$ . Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l’indice entrante  $k$ , il vettore  $\eta_B$ , il passo  $\bar{\theta}$  e l’indice uscente  $h$ , giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si individui l’insieme delle soluzioni ottime del problema dato.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 + 2x_2 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq -2 \\
 & -x_1 - x_2 \leq -2
 \end{aligned}$$

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati  $Q$ . Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell’arco  $(9, 7)$  sia un parametro reale  $\epsilon$ , e si discuta per quali valori del parametro l’albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3, giustificando la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l’algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore  $v = 6$ . Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l’ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l’albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio  $(N_s, N_t)$  restituito dall’algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine l’unicità del taglio di capacità minima determinato.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 - x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 5 \\
 & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq -1 \\
 & -x_1 \leq 2
 \end{aligned}$$

Utilizzando il Lemma di Farkas, si verifichi se la soluzione  $\bar{x} = (-2, 3)$  è ottima per tale problema. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per  $\bar{x}$  e si rappresenti graficamente il cono di tutte queste direzioni. Successivamente, si scelga un vettore  $c$  dei coefficienti della funzione obiettivo tale che  $\bar{x}$  sia una soluzione ottima del problema dato e che il problema duale ammetta un’unica soluzione ottima. Giustificare le risposte.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 1x_5 + 2x_6 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

l’algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l’euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l’albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell’albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall’euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perchè.