RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Al termine si dimostri formalmente la correttezza della risposta fornita dall'algoritmo.

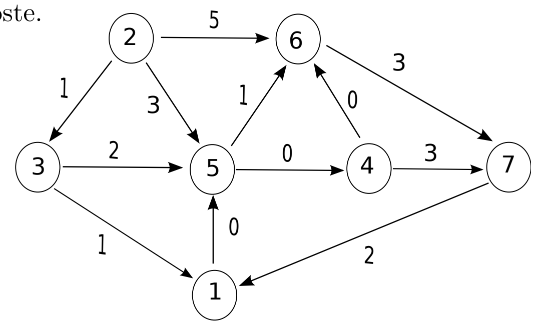
$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -7
\end{array}
$$

2) Si consideri il seguente problema di PL:

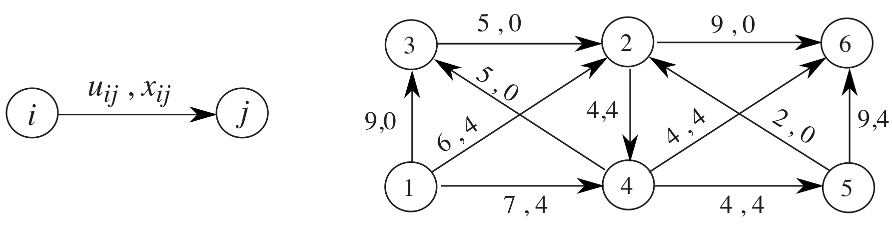
$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & -x_1 & + & x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & -x_2 & \leq & 0 \\
 & -3x_1 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso $\bar{x}$ sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell'arco $(5, 6)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 1, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di ϵ l'albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 8$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(4, 6)$ avesse capacità $u_{46} = 5$.



5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \max\{\, 2x_1 - x_2 + x_3 \,,\, -x_1 + x_2 + 2x_3 \,\} \\
 & x_1, x_3 \in \{0,1\} \\
 & x_1 = 1 \Longrightarrow x_2 \in \{4,7,8\} \\
 & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\
 & x_1 = 1 \;\; and \;\; x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 7
\end{array}
$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.