RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva algebricamente il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrrrrl} \max & x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 7 \end{array}$$

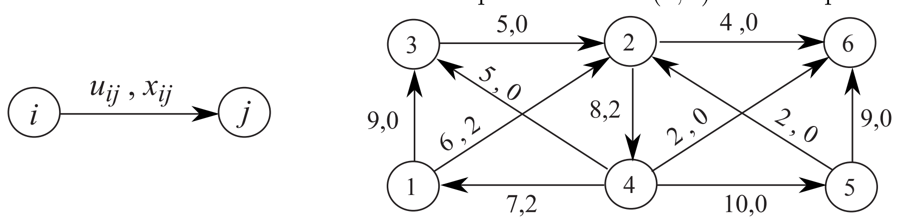
mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[1, -1]$ invece che $[1, -2]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

2) Si consideri il seguente problema di PL parametrico in ε

$$(P) \qquad \begin{array}{rrrrrl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 + \varepsilon \end{array}$$

e la soluzione $\bar{y} = [0, 0, 6/5, 1/5]$ per il suo duale; utilizzando il il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di ε la soluzione $\bar{y}$ è ottima per il duale, discutendone l'unicità. Giustificare le risposte.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, discutendo se sia l'unico taglio di capacità minima. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(2, 4)$ avesse capacità $u_{24} = 7$.



4) Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, si riformuli il seguente modello matematico

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{\, 2x_1 - x_2 - x_3 \,,\, x_1 + x_2 + 2x_3 \,\} \\ & x_1 \in \{0, 1\} \\ & 0 \leq x_2 \leq 50 \\ & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 50 \\ & x_3 = x_2 x_1 \end{array}$$

come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

5) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrl} \max & 2x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine se i dati ricavati durante l'esecuzione dell'algoritmo permettano di dichiarare che la soluzione ottima è unica.

6) Si enuncino e si dimostrino le condizioni di ottimalità relative al problema di Flusso di Costo Minimo.