LMB - Informatica - Alcune soluzioni

3.24.1 Dimostrare la formula $((P \land Q) \Rightarrow (P \lor Q))$ è una tautologia.

Soluzione:

$$
\begin{array}{ll}
 & ((P \land Q) \Rightarrow (P \lor Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (eliminazione dell'implicazione) } \} \\
 & (\underline{\neg(P \land Q)} \lor (P \lor Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (De Morgan) } \} \\
 & ((\neg P \lor \neg Q) \lor (P \lor Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (associatività) e (commutatività), alcune volte } \} \\
 & (\underline{(P \lor \neg P)} \lor \underline{(Q \lor \neg Q)}) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (terzo escluso), due volte } \} \\
 & (\top \lor \top) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (idempotenza) } \} \\
 & \top
\end{array}
$$

3.24.4 Dimostrare la formula $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \land \neg B))$ è una tautologia.

Soluzione: Invece di dimostrare per sostituzione che $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \land \neg B)) \equiv \top$ possiamo dimostrare più semplicemente che $(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \land \neg B)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & (A \Rightarrow B) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (eliminazione dell'implicazione) } \} \\
 & (\neg A \lor \underline{B}) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (doppia negazione), al contrario } \} \\
 & (\neg A \lor \neg\neg B) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (De Morgan), al contrario } \} \\
 & \neg(A \land \neg B)
\end{array}
$$

3.5.3.1(a) Dimostrare la seguente equivalenza logica oppure fornire un controesempio:

$$((P \lor Q) \Rightarrow (P \land Q)) \equiv \top$$

Soluzione: Prima di provare a cercare un controesempio, proviamo a semplificare la formula procedendo per sostituzione:

$$
\begin{array}{ll}
 & ((P \lor Q) \Rightarrow (P \land Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (eliminazione dell'implicazione) } \} \\
 & (\neg(P \lor Q) \lor (P \land Q)) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (De Morgan) } \} \\
 & ((\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q))
\end{array}
$$

Arrivati a questo punto è facile accorgersi che la formula non è una tautologia, perché è vera solo quando P e Q sono entrambi falsi $(\neg P \land \neg Q)$ oppure entrambi veri $(P \land Q)$. Quindi l'interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 0\}$ fornisce un controesempio.