LMB - Informatica - Prova di esame del 3 Ottobre 2013

Attenzione: Questo documento presenta per ognuno degli esercizi proposti una possibile soluzione che sarebbe stata considerata corretta e ben valutata dai docenti. Naturalmente ci possono essere soluzioni corrette anche molto diverse da quelle proposte.

1. Fornire un controesempio alla congettura che

   $$\text{“}\textit{per ogni } A,B,C \textit{ tali che } A \subseteq B \textit{ e } (A \cap B) \subseteq C \textit{ si ha } B \subseteq C\text{”}.$$

   Soluzione: Dato che $A \subseteq B$ si ha $(A \cap B) = A$, quindi le sole ipotesi che abbiamo sono $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ che, in generale, non permettono di concludere che B e C siano legati da una qualche relazione di inclusione. Infatti, un semplice controesempio alla congettura si ha prendendo $A = \emptyset$, $B = \{0\}$ e $C = \{1\}$.

2. Sapendo che *“se c'è il sole allora non porti l'ombrello”* e che *“porti l'ombrello”*, possiamo concludere che *“non c'è il sole”*?
   Motivare la risposta formalizzando gli enunciati.

   Soluzione: Fissiamo i simboli proposizionali S per *“c'è il sole”* e P per *“porti l'ombrello”*. L'esercizio richiede di dimostrare se la seguente formula è una tautologia:

   $$(((S \Rightarrow \neg P) \wedge P) \Rightarrow \neg S)$$

   Non trovando un controesempio (cioè un'interpretazione che renda falsa la formula), procediamo per sostituzione (esplicitando i passaggi di associatività e commutatività solo per maggiore chiarezza):

   $(((\underline{S \Rightarrow \neg P}) \wedge P) \Rightarrow \neg S)$

   $\equiv$ { (elim. implicazione) }

   $(\underline{(\underline{(\neg S \vee \neg P)} \wedge P)} \Rightarrow \neg S)$

   $\equiv$ { (commutatività), due volte }

   $(\underline{(P \wedge (\neg P \vee \neg S))} \Rightarrow \neg S)$

   $\equiv$ { (complemento) }

   $((P \wedge \neg S) \Rightarrow \neg S)$

   $\equiv$ { (elim. implicazione) }

   $(\underline{\neg(P \wedge \neg S)} \vee \neg S)$

   $\equiv$ { (De Morgan) }

   $((\neg P \vee \underline{\neg\neg S}) \vee \neg S)$

   $\equiv$ { (doppia negazione) }

   $((\neg P \vee S) \vee \neg S)$

   $\equiv$ { (associatività) }

   $(\neg P \vee \underline{(S \vee \neg S)})$

$\equiv \quad \{$ (terzo escluso) $\}$

$(\neg P \vee \mathsf{T})$

$\equiv \quad \{$ (dominanza) $\}$

T

3. Dimostrare, procedendo per sostituzione, che le seguenti formule proposizionali sono equivalenti:

   (a) $((P \wedge Q) \;\Rightarrow\; \neg R)$

   (b) $(Q \;\Rightarrow\; \neg(P \wedge R))$

   Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

   $((P \wedge Q) \Rightarrow \neg R)$

   $\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

   $(\underline{\neg(P \wedge Q)} \vee \neg R)$

   $\equiv \quad \{$ (De Morgan) $\}$

   $((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R)$

   $(Q \Rightarrow \neg(P \wedge R))$

   $\equiv \quad \{$ (elim. implicazione) $\}$

   $(\neg Q \vee \underline{\neg(P \wedge R)})$

   $\equiv \quad \{$ (De Morgan) $\}$

   $(\neg Q \vee (\neg P \vee \neg R))$

   $\equiv \quad \{$ (associatività) $\}$

   $((\neg Q \vee \neg P) \vee \neg R))$

   $\equiv \quad \{$ (commutatività) $\}$

   $((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R))$

4. Senza costruire l'intera tabella di verità, fornire due interpretazioni che dimostrano che la formula $(\neg P \;\Rightarrow\; (Q \wedge R))$ è soddisfacibile e che non è una tautologia.

   Soluzione: Trattandosi di un'implicazione, per dimostrare che la formula è soddisfacibile basta fornire una interpretazione che renda falsa l'ipotesi $\neg P$ oppure vera la tesi $(Q \wedge R)$. Ad esempio, prendiamo $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1, R \mapsto 1\}$.

   Per dimostrare che non è una tautologia, dobbiamo trovare un'interpretazione che renda vera l'ipotesi e falsa la tesi. Ad esempio, prendiamo $\{P \mapsto 0, Q \mapsto 0, R \mapsto 0\}$.

   Riportiamo sotto le corrispondenti righe della tabella di verità.

P	Q	R	$(\neg$	P	$\Rightarrow$	$(Q$	$\wedge$	$R))$
1	1	1	0	1	**1**	1	1	1
0	0	0	1	0	**0**	0	0	0
			(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)

5. Formalizzare l'enunciato *"tutti quelli che sono più furbi di Alessia sono anche più furbi di Beppe, ma Carla è più furba di tutti"* introducendo tre costanti e un simbolo di predicato interpretati sul dominio delle persone.

   Soluzione: Introduciamo le costanti *Alessia*, *Beppe* e *Carla* e il simbolo di predicato binario $piuFurbo(x,y)$ dal significato *"x è più furbo di y"*.

$$(\forall x\,.\,(piuFurbo(x,Alessia) \Rightarrow piuFurbo(x,Beppe))) \wedge (\forall x\,.\,piuFurbo(Carla,x))$$

6. Dimostrare che le seguenti formule predicative sono logicamente equivalenti:

   (a) $\big((\forall x\,.\,(Q(x) \vee \neg P(x))) \Rightarrow (\exists x\,.\,Q(x))\big)$

   (b) $\neg\big(\forall x\,.\,\neg(\neg P(x) \Rightarrow Q(x))\big)$

   Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

   $\big((\forall x\,.\,(Q(x) \vee \neg P(x))) \Rightarrow (\exists x\,.\,Q(x))\big)$
   $\equiv$ { (elim. implicazione) }
   $\big(\underline{\neg(\forall x\,.\,(Q(x) \vee \neg P(x)))} \vee (\exists x\,.\,Q(x))\big)$
   $\equiv$ { (De Morgan) }
   $\big((\exists x\,.\,\underline{\neg(Q(x) \vee \neg P(x))}) \vee (\exists x\,.\,Q(x))\big)$
   $\equiv$ { (De Morgan) }
   $\big((\exists x\,.\,(\neg Q(x) \wedge \underline{\neg\neg P(x)})) \vee (\exists x\,.\,Q(x))\big)$
   $\equiv$ { (doppia negazione) }
   $\big((\exists x\,.\,(\neg Q(x) \wedge P(x))) \vee (\exists x\,.\,Q(x))\big)$
   $\equiv$ { (distributività) }
   $\big(\exists x\,.\,\underline{((\neg Q(x) \wedge P(x)) \vee Q(x))}\big)$
   $\equiv$ { (commutatività) }
   $\big(\exists x\,.\,(Q(x) \vee (\neg Q(x) \wedge P(x)))\big)$
   $\equiv$ { (complemento) }
   $\big(\exists x\,.\,(Q(x) \vee P(x))\big)$

   $\neg\big(\forall x\,.\,\neg(\neg P(x) \Rightarrow Q(x))\big)$
   $\equiv$ { (De Morgan) }
   $\big(\exists x\,.\,\underline{\neg\neg(\neg P(x) \Rightarrow Q(x))}\big)$
   $\equiv$ { (doppia negazione) }
   $\big(\exists x\,.\,\underline{(\neg P(x) \Rightarrow Q(x))}\big)$

$\equiv$ { (elim. implicazione) }

$(\exists x \,.\, (\underline{\neg\neg P(x)} \vee Q(x)))$

$\equiv$ { (doppia negazione) }

$(\exists x \,.\, (P(x) \vee Q(x)))$

$\equiv$ { (commutatività) }

$(\exists x \,.\, (Q(x) \vee P(x)))$