Algoritmica

Notazione asintotica

Cosa si analizza/valuta di un algoritmo

- Correttezza
  - Dimostrazione formale (matematica)
  - Ispezione informale
- Utilizzo delle risorse
  - Tempo di esecuzione
  - Utilizzo della memoria
  - Altre risorse: banda di comunicazione
- Semplicità
  - Facile da capire e da manutenere

Tempo di esecuzione

- Il ***tempo di esecuzione*** di un programma dipende da:
  - Hardware
  - Compilatore
  - Input
  - ….

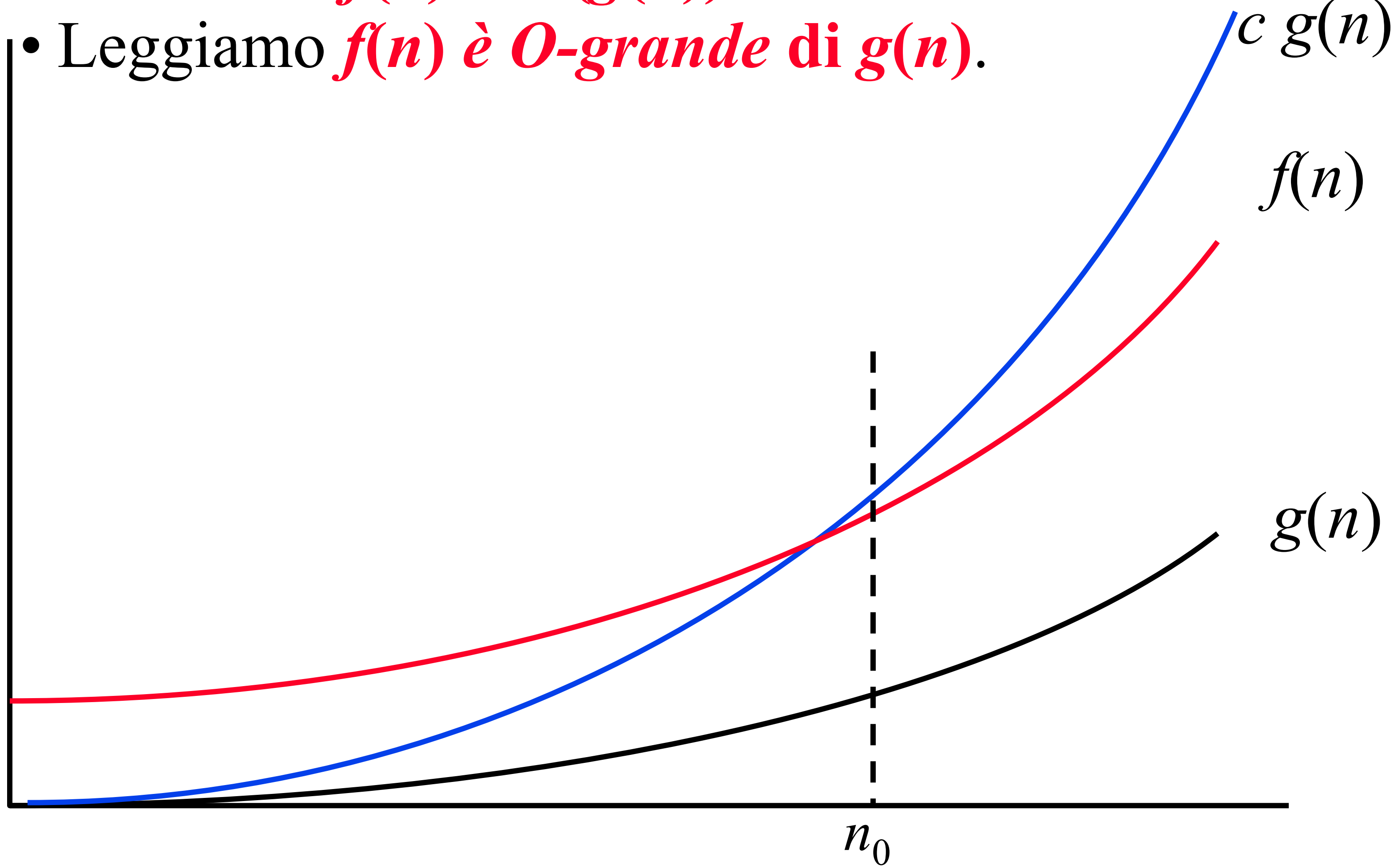
Modello computazionale

- Modello RAM (Random-Access Model)
  - Memoria principale infinita
    - Ogni cella di memoria può contenere una quantità di dati finita.
    - Impiega lo stesso tempo per accedere ad ogni cella di memoria.
  - Singolo processore + programma
    - In 1 unità di tempo: operazioni di *lettura*, *esecuzione* di una *computazione*, *scrittura*;
    - Addizione, moltiplicazione, assegnamento, confronto, accesso a puntatore
- Il modello RAM costituisce un'astrazione dei moderni calcolatori.

Limite superiore asintotico

esiste $c>0, n_0>0$ t.c. $f(n) \leq c\, g(n)$ per tutti gli $n \geq n_0$

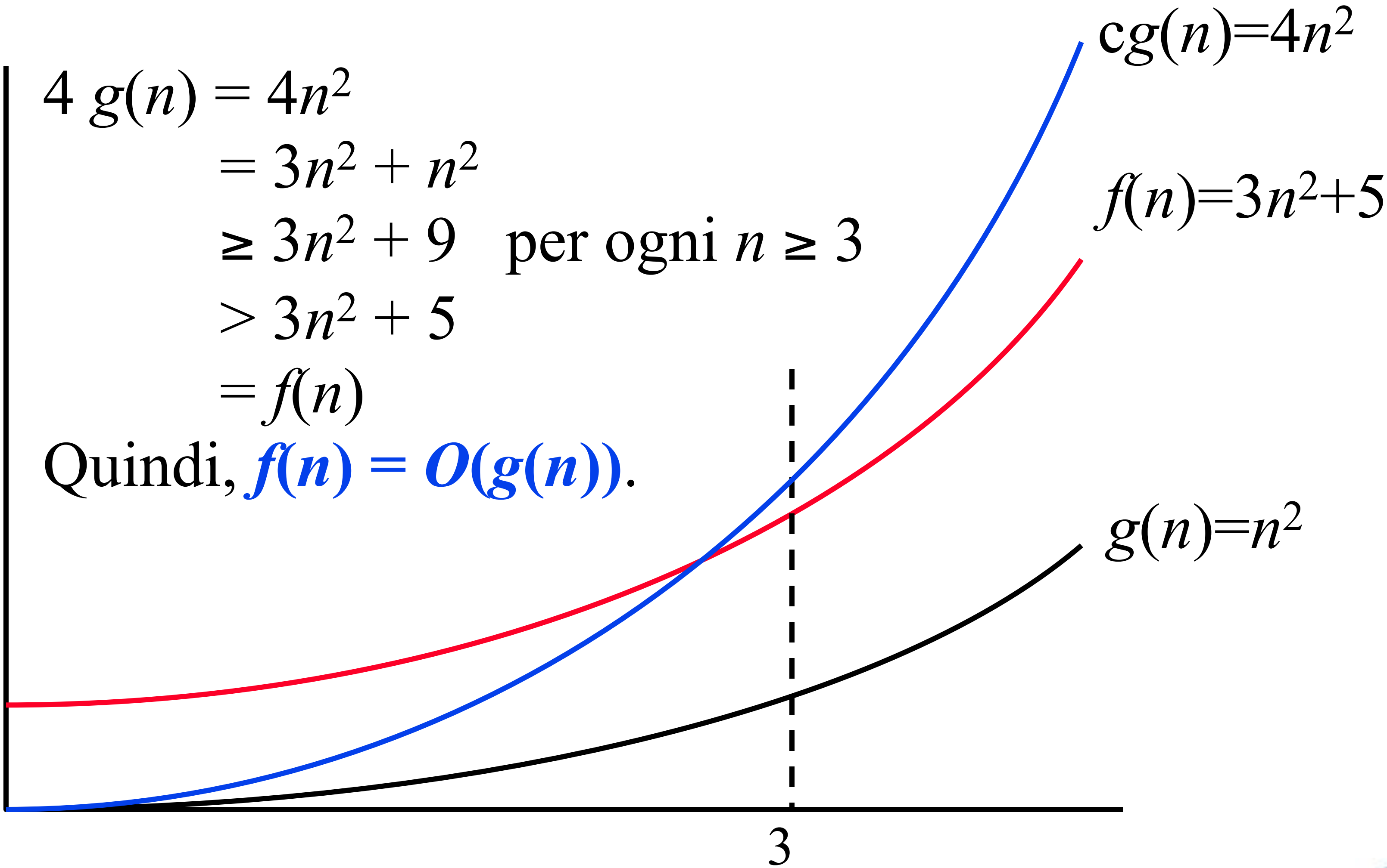
- $g(n)$ è detto un **limite superiore asintotico** di $f(n)$.
- Scriviamo $f(n) = O(g(n))$
- Leggiamo $f(n)$ ***è O-grande*** **di** $g(n)$.



Esempio di limite superiore asintotico

$$
\begin{aligned}
4\,g(n) &= 4n^2 \\
&= 3n^2 + n^2 \\
&\geq 3n^2 + 9 \quad \text{per ogni } n \geq 3 \\
&> 3n^2 + 5 \\
&= f(n)
\end{aligned}
$$

Quindi, $\boldsymbol{f(n) = O(g(n))}$.



Esercizio sulla notazione O

- Mostrare che $3n^2+2n+5 = O(n^2)$

$10n^2 = 3n^2 + 2n^2 + 5n^2$

$\geq 3n^2 + 2n + 5$ per $n \geq 1$

$c = 10,\ n_0 = 1$

Utilizzo della notazione O

- In genere quando impieghiamo la notazione O, utilizziamo l'espressione più "*semplice*" all'interno della notazione:
- Scriveremo quindi
    - $3n^2+2n+5 = O(n^2)$
  - Anche se seguenti sono tutte corrette ma in genere *non useremo*:
    - $3n^2+2n+5 = O(3n^2+2n+5)$
    - $3n^2+2n+5 = O(n^2+n)$
    - $3n^2+2n+5 = O(3n^2)$

Esercizi sulla notazione O

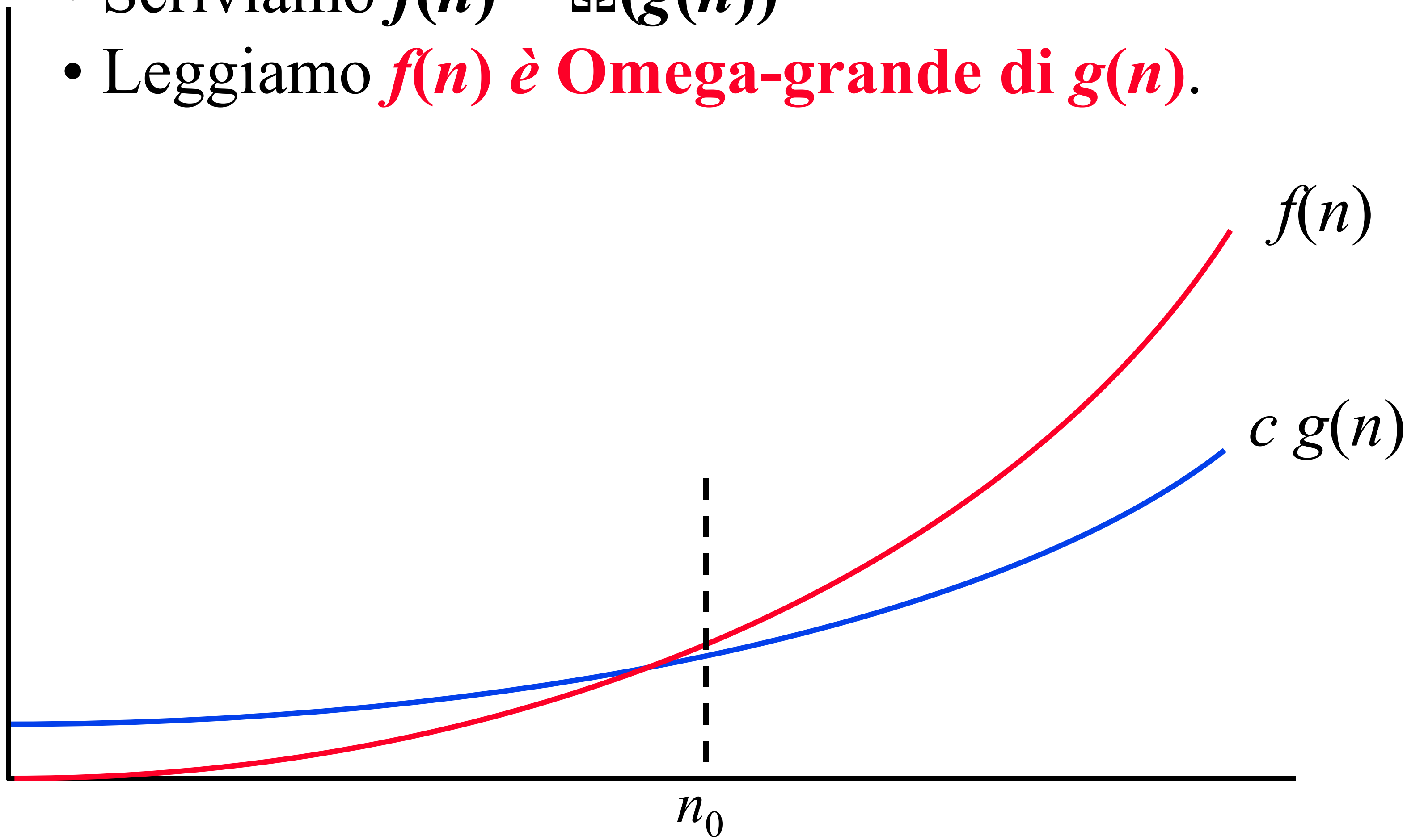
- $f_1(n) = 10\ n + 25\ n^2$
- $f_2(n) = 20\ n \log n + 5\ n$
- $f_3(n) = 12\ n \log n + 0.05\ n^2$
- $f_4(n) = n^{1/2} + 3\ n \log n$

- $O(n^2)$
- $O(n \log n)$
- $O(n^2)$
- $O(n \log n)$

Limite inferiore asintotico

esiste $c>0, n_0>0$ t.c. $f(n) \geq c\, g(n)$ per tutti gli $n \geq n_0$

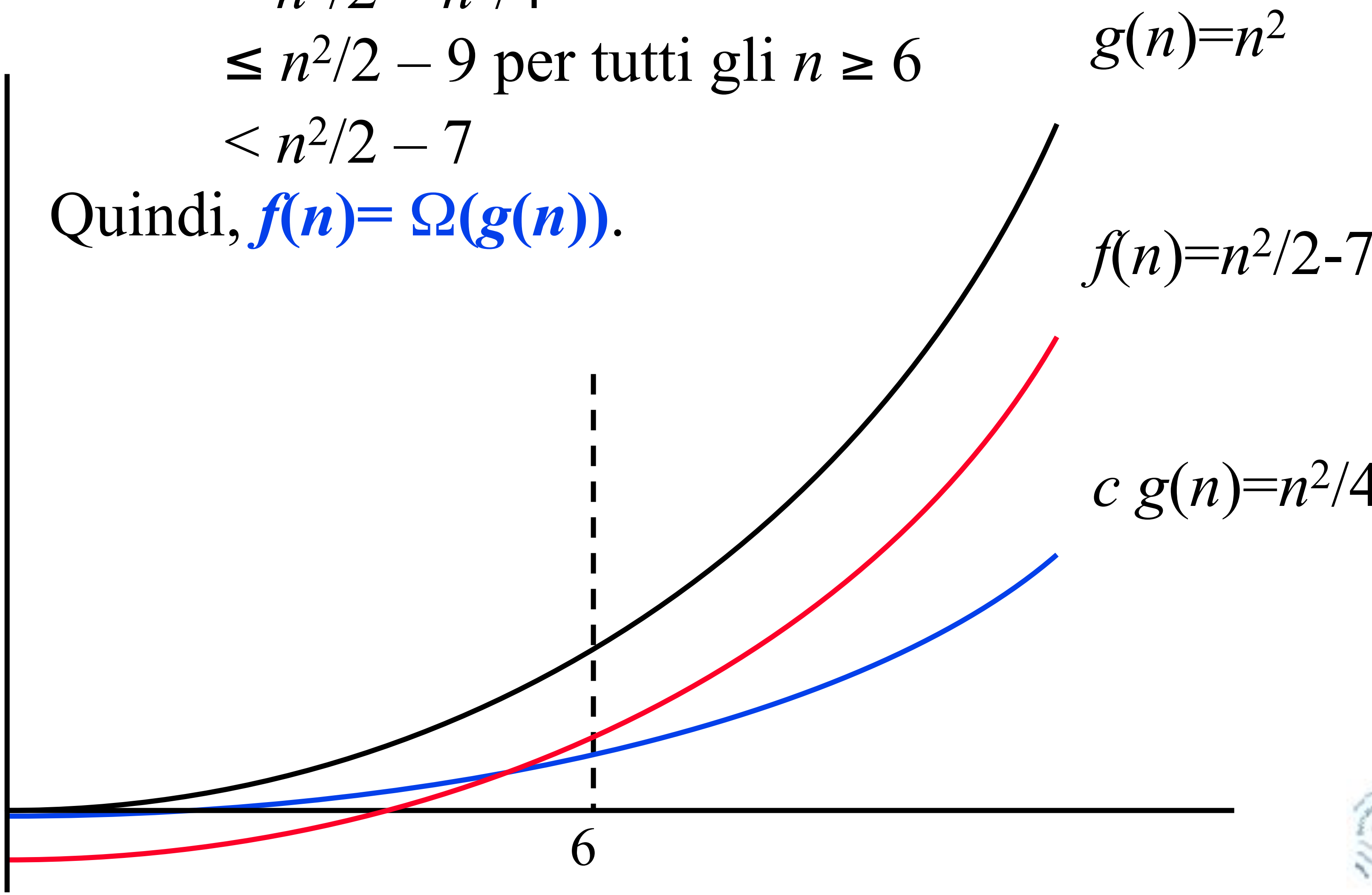
- $g(n)$ è detto un **limite inferiore asintotico** di $f(n)$.
- Scriviamo $\boldsymbol{f(n) = \Omega(g(n))}$
- Leggiamo ***f*(*n*) *è* Omega-grande di *g*(*n*)**.



Esempio di limite inferiore asintotico

$$
\begin{aligned}
g(n)/4 &= n^2/4 \\
&= n^2/2 - n^2/4 \\
&\leq n^2/2 - 9 \text{ per tutti gli } n \geq 6 \\
&< n^2/2 - 7
\end{aligned}
$$

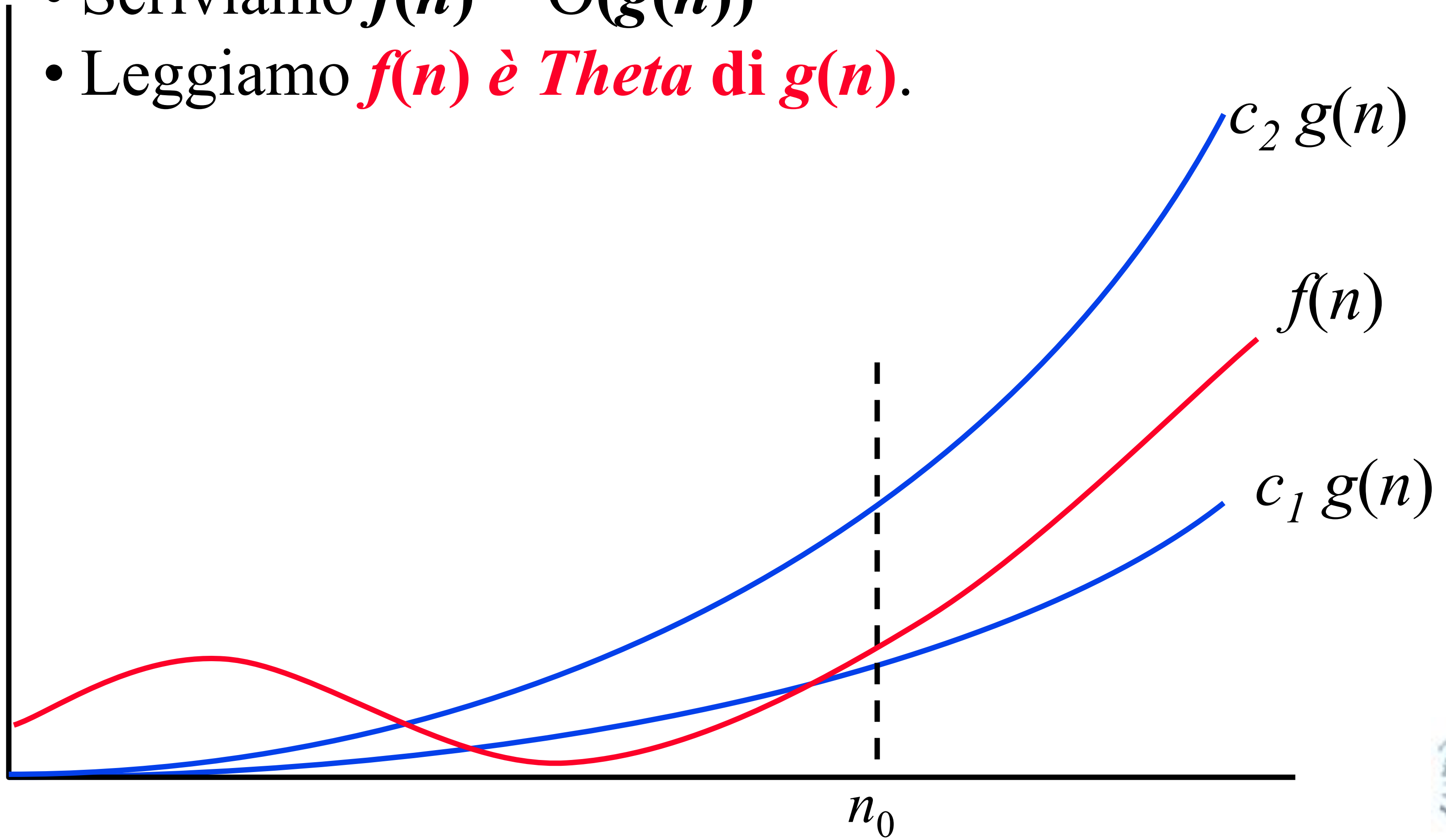
Quindi, $\boldsymbol{f(n) = \Omega(g(n))}$.



Limite asintotico stretto

$$f(n) = O(g(n)) \text{ e } f(n) = \Omega(g(n))$$

- $g(n)$ è detto un **limite asintotico stretto** di $f(n)$.
- Scriviamo $\boldsymbol{f(n) = \Theta(g(n))}$
- Leggiamo ***f(n) è Theta* di *g(n)***.

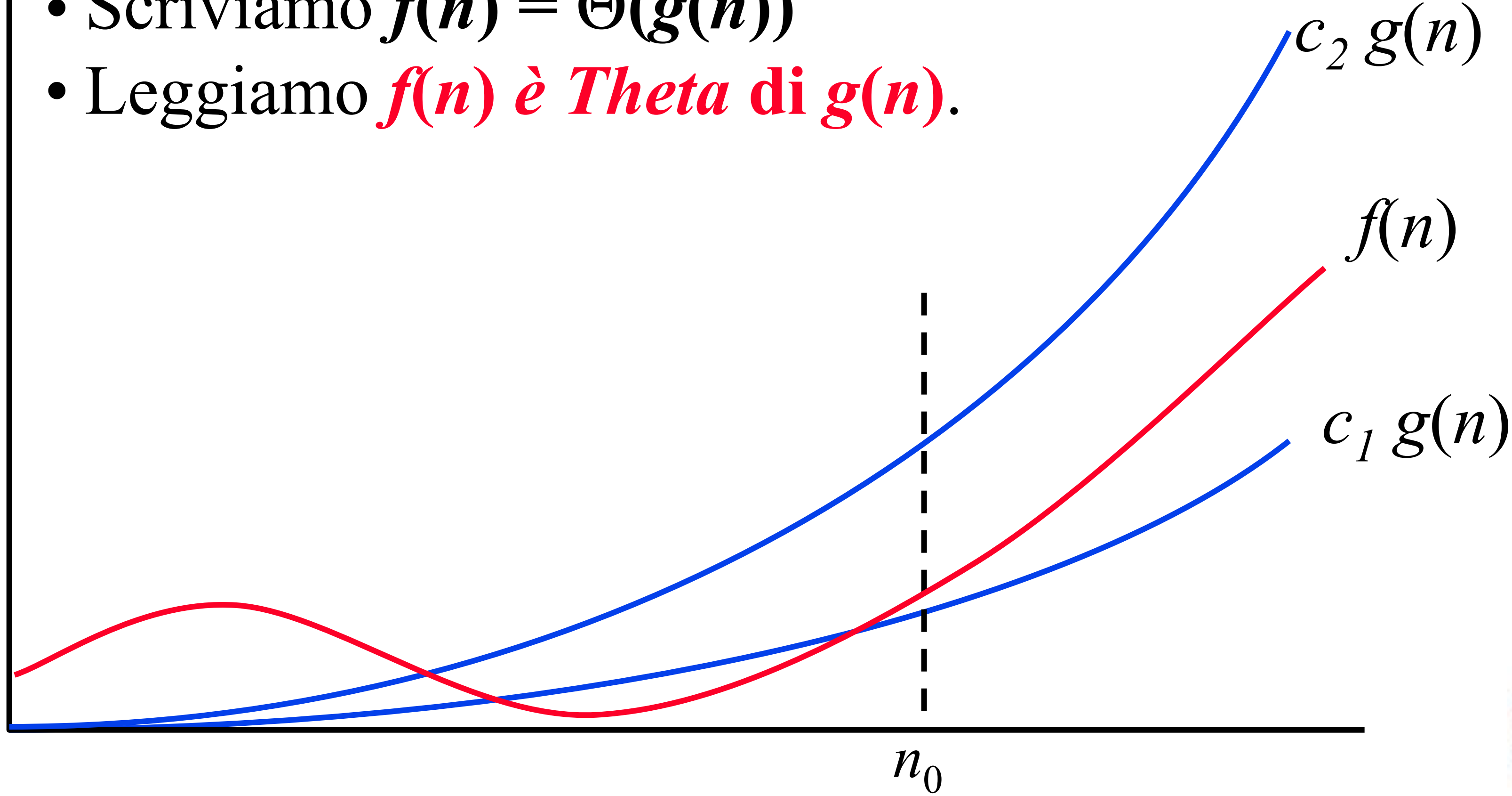


Limite asintotico stretto

esistono $c_1>0$, $c_2>0$ e $n_0>0$ tali che

$$c_1\, g(n) \le f(n) \le c_2\, g(n) \text{ per tutti gli } n \ge n_0$$

- $g(n)$ è detto un **limite asintotico stretto** di $f(n)$.
- Scriviamo $f(n) = \Theta(g(n))$
- Leggiamo ***f(n) è Theta* di *g(n)***.



Riassunto della notazione asintotica

- O: *O-grande*: limite superiore asintotico
- Ω: *Omega-grande*: limite inferiore asintotico
- Θ: *Theta*: limite asintotico stretto

- Usiamo la *notazione asintotica* per dare un limite ad una funzione ($f(n)$), a meno di un fattore costante (c).

Teoremi sulla notazione asintotica

Teoremi:

- $f(n) = O(g(n))$ se e solo se $g(n) = \Omega(f(n))$.
- Se $f_1(n)=O(f_2(n))$ e $f_2(n)=O(f_3(n))$, allora $f_1(n)=O(f_3(n))$
- Se $f_1(n)=\Omega(f_2(n))$ e $f_2(n)=\Omega(f_3(n))$, allora $f_1(n)=\Omega(f_3(n))$
- Se $f_1(n)=\Theta(f_2(n))$ e $f_2(n)=\Theta(f_3(n))$, allora $f_1(n)=\Theta(f_3(n))$
- Se $f_1(n) = O(g_1(n))$ e $f_2(n) = O(g_2(n))$, allora

$$O(f_1(n) + f_2(n)) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$$

- Se $f(n)$ è un *polinomio* di grado d, allora $f(n) = \Theta(n^d)$

Analisi del Caso Migliore e Caso Peggiore

- Analisi del Caso Migliore
  - Ω-grande, limite inferiore, del tempo di esecuzione per un qualunque *input di dimensione* N.
- Analisi del Caso Peggiore
  - O-grande, limite superiore, del tempo di esecuzione per un qualunque *input di dimensione* N.

Analisi del Caso Medio

- Analisi del Caso Medio
  - Alcuni algoritmi sono efficienti in pratica.
  - L'analisi è in genere molto più difficile.
  - Bisogna generalmente assumere che tutti gli input siano ugualmente probabili.
  - A volte non è ovvio quale sia il valore medio.

Ulteriori notazioni asintotiche

- O, Ω ci forniscono un modo per parlare di limiti che possono essere asintoticamente *stretti*:
  - ad esempio $2n = O(n)$, e anche $2n = \Omega(n)$
  - $2n = O(n^2)$, ma $2n \neq \Omega(n^2)$

Ulteriori notazioni asintotiche

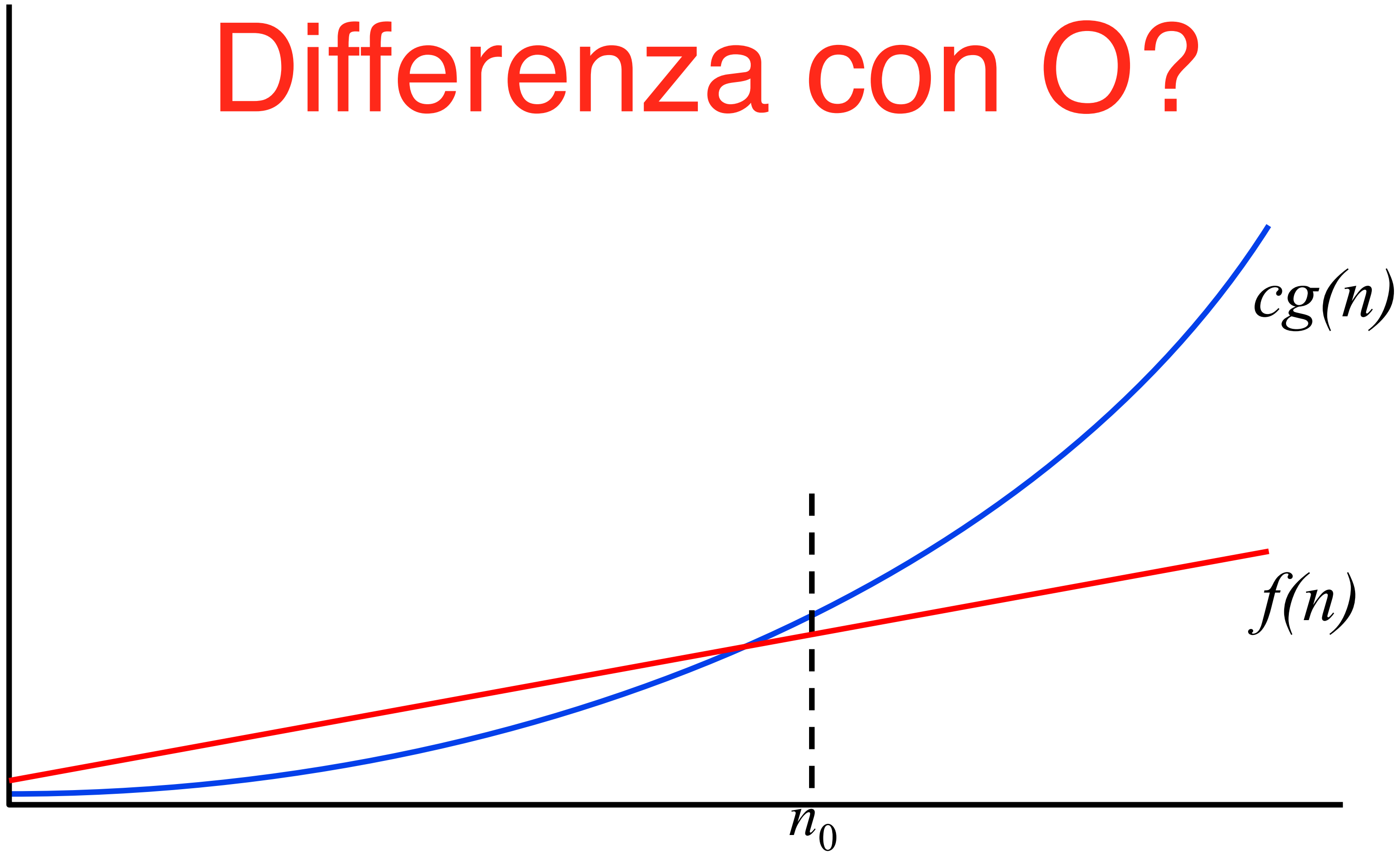
- O, Ω ci forniscono un modo per parlare di limiti che possono essere asintoticamente *stretti*:
  - ad esempio $2n = O(n)$, e anche $2n = \Omega(n)$
  - $2n = O(n^2)$, ma $2n \neq \Omega(n^2)$
- Esistono notazioni asintotiche per parlare di limiti *non* asintoticamente stretti!
  - $o(n)$
  - $\omega(n)$

Limite asintotico superiore non stretto

- per ogni $c>0$ esiste un n_0 tale che

$$f(n) < c\, g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$

Differenza con O?



Limite asintotico superiore non stretto

- **per ogni** $c>0$ esiste un n_0 tale che

  $f(n) < c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$

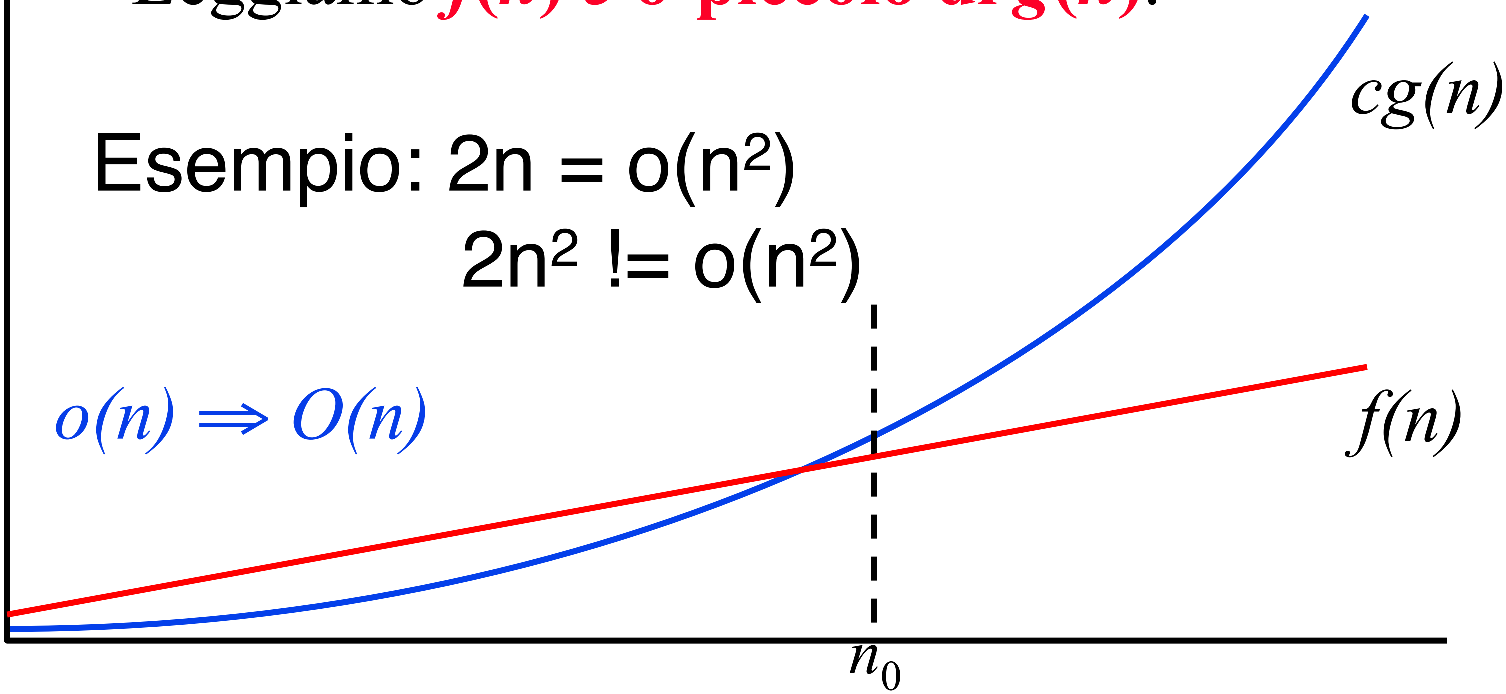
- $g(n)$ è detto un

  limite superiore asintotico non stretto di $f(n)$.
- Scriviamo $\boldsymbol{f(n) = \mathrm{o}(g(n))}$
- Leggiamo ***f*(*n*) *è* o-piccolo di *g*(*n*)**.

Esempio: $2n = o(n^2)$

$2n^2 \mathrel{!}= o(n^2)$

$o(n) \Rightarrow O(n)$



Limite asintotico superiore non stretto

- $f(n) = o(g(n))$ significa che **per ogni** $c>0$ esiste un n_0 tale che $f(n) < c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$

- Una definizione alternativa ***ma equivalente*** è che:

f(n) insignificante rispetto a g(n), all'infinito

$$f(n) = o(g(n)) \text{ sse } \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$$

o equivalentemente che:

$$f(n) = o(g(n)) \text{ sse } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Limite asintotico inferiore non stretto

- **per ogni** $c>0$ esiste un n_0 tale che

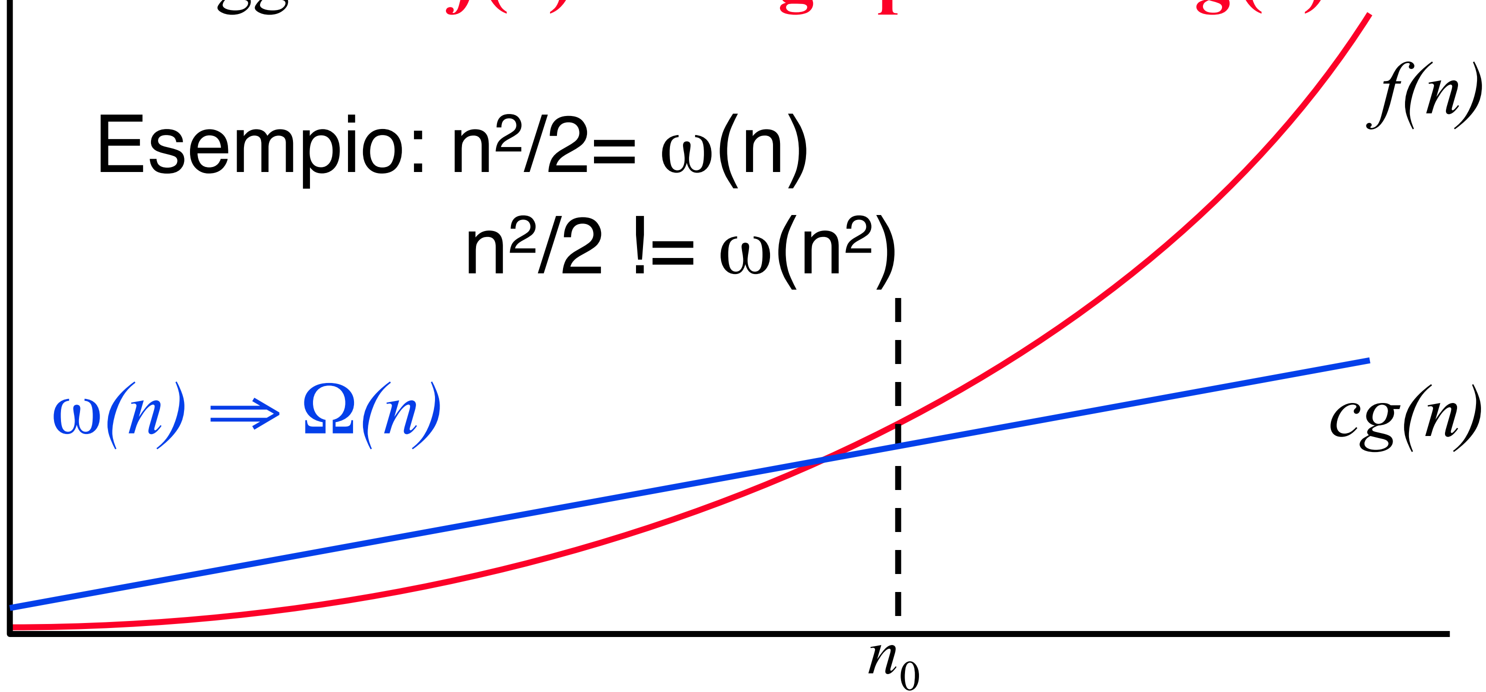
$$f(n) > c\,g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$

- $g(n)$ è detto un **limite inferiore asintotico non stretto** di $f(n)$.
- Scriviamo $\boldsymbol{f(n) = \omega(g(n))}$
- Leggiamo ***f*(*n*) *è* omega-piccolo di *g*(*n*)**.

Esempio: $n^2/2 = \omega(n)$

$n^2/2 \mathrel{!=} \omega(n^2)$

$\omega(n) \Rightarrow \Omega(n)$



Limite asintotico inferiore non stretto

- $f(n) = \omega(g(n))$ significa che per ogni $c>0$ esiste un n_0 tale che $f(n) > c\, g(n)$ per ogni $n \geq n_0$
- Una definizione alternativa *ma equivalente* è che:

$$\boxed{f(n) = \omega(g(n)) \text{ sse } \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0}$$

o equivalentemente che:

f(n) arbitrariamente grande rispetto a g(n), all'infinito

$$\boxed{f(n) = \omega(g(n)) \text{ sse } \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty}$$