Teoria della Calcolabilità

- Si occupa delle questioni fondamentali circa la **potenza** e le **limitazioni** dei sistemi di calcolo.
- L'origine risale alla prima metà del ventesimo secolo, quando i logici matematici iniziarono ad esplorare i concetti di

  computazione
  algoritmo
  problema risolvibile per via algoritmica

  e dimostrarono l'esistenza di problemi che non ammettono un algoritmo di risoluzione.

  $\Rightarrow$ ***Problemi non decidibili***

Problemi computazionali

Problemi formulati matematicamente di cui cerchiamo una soluzione algoritmica.

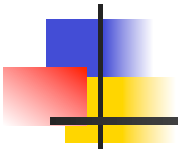
Classificazione:

- **problemi non decidibili**
- **problemi decidibili**
  - problemi **trattabili** (costo polinomiale)
  - problemi **intrattabili** (costo esponenziale)

Calcolabilità e complessità

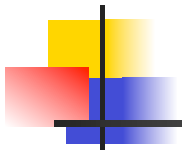
- **Calcolabilità**: nozioni di algoritmo e di problema non decidibile
- **Complessità**: nozione di algoritmo efficiente e di problema intrattabile
- La calcolabilità ha lo scopo di classificare i problemi in ***risolvibili*** e ***non risolvibili***, mentre la complessità in ***"facili"*** e ***"difficili"***

ESISTENZA DI PROBLEMI INDECIDIBILI



Il problema della rappresentazione

L'informatica rappresenta tutte le sue entità (quindi anche gli algoritmi) in forma digitale, come ***sequenze finite di simboli di alfabeti finiti*** (e.g., {0,1}).



Il concetto di algoritmo

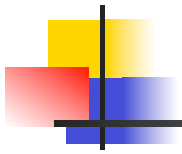
Algoritmo:

sequenza finita di operazioni, completamente e univocamente determinate

Algoritmi

La formulazione di un algoritmo dipende dal modello di calcolo utilizzato:

- *"programma" per un modello matematico astratto, come una Macchina di Turing*
- *algoritmo per in pseudocodice per RAM*
- *programma in linguaggio C per un PC*



Algoritmi

Qualsiasi modello si scelga, gli algoritmi devono esservi descritti,

ossia rappresentati da sequenze finite di caratteri di un alfabeto finito

⇒ ***gli algoritmi sono possibilmente infiniti,***

ma numerabili

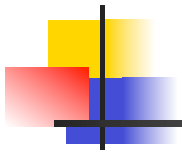
possono essere 'elencati' (messi in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali)

Problemi computazionali

I problemi computazionali

(funzioni matematiche che associano ad ogni insieme di dati il corrispondente risultato)

non sono numerabili



Il problema della rappresentazione

Drastica perdita di potenza:

gli algoritmi sono numerabili,

e sono meno dei problemi computazionali, che hanno la potenza del continuo

$|\{\text{Algoritmi}\}| < |\{\text{Problemi}\}|$

$\Rightarrow$

Esistono problemi privi di un corrispondente algoritmo di calcolo!

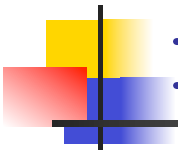
Il problema dell'arresto

Esistono dunque problemi non calcolabili

I problemi che si presentano spontaneamente sono tutti calcolabili

Non è stato facile individuare un problema che non lo fosse

Turing (1930): **Problema dell'arresto**



Il problema dell'arresto

*Presi ad arbitrio un algoritmo A e i suoi dati di input D, decidere **in tempo finito** se la computazione di A su D termina o no.*

Il problema dell'arresto

- *Algoritmo che indaga sulle proprietà di un altro algoritmo*, trattato come dato di input
- È legittimo: possiamo usare lo stesso alfabeto per codificare algoritmi e i loro dati di ingresso (sequenze di simboli dell'alfabeto)
- Una stessa sequenza di simboli può essere quindi interpretata sia come un programma, sia come un dato di ingresso di un altro programma

Il problema dell'arresto

- Un algoritmo A, comunque formulato, può operare sulla rappresentazione di un altro algoritmo B
- Possiamo calcolare A(B)
- In particolare può avere senso calcolare A(A)

Il problema dell'arresto

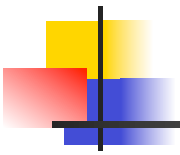
Consiste nel chiedersi se un generico programma termina la sua esecuzione,

oppure "va in ciclo", ovvero continua a ripetere la stessa sequenza di istruzioni all'infinito (supponendo di non avere limiti di tempo e memoria).

ESEMPIO: Stabilire se un intero p > 1 è primo.

```
Primo(p)
fattore = 2;
while (p % fattore != 0)
      fattore++;
return (fattore == p);
```

Termina sicuramente (la guardia del **while** diventa falsa quando fattore = p).

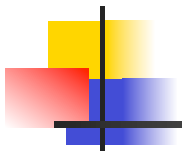


ESEMPIO

- Programma che trova il più piccolo numero intero pari (maggiore di 4) che **NON** sia la somma di due numeri primi
- Il programma si arresta quando trova $n \geq 4$ che NON è la somma di due primi

ESEMPIO

```
Goldbach()
n = 2;
do {
      n = n + 2;
      controesempio = true;
      for (p = 2; p ≤ n -2; p++) {
            q = n – p;
            if (Primo(p) && Primo(q))
                  controesempio = false;
      }
} while (!controesempio);
return n;
```



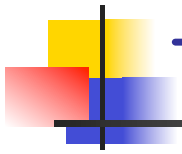
Congettura di Goldbach

XVIII secolo

"ogni numero intero pari n ≥ 4 è la somma di due numeri primi"

Congettura **falsa** ➔ `Goldbach()` si arresta

Congettura **vera** ➔ `Goldbach()` **NON** si arresta



TEOREMA

Turing ha dimostrato che riuscire a dimostrare se un programma arbitrario si arresta e termina la sua esecuzione non è solo un' impresa ardua, ma in generale è IMPOSSIBILE!

TEOREMA

Il problema dell'arresto è INDECIDIBILE

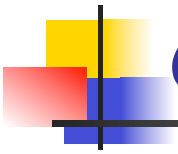
DIMOSTRAZIONE

Se il problema dell'arresto fosse decidibile, allora esisterebbe un algoritmo ARRESTO che:

- presi A e D come dati di input
- determina in **tempo finito** le risposte:

ARRESTO(A,D) = 1 se A(D) termina

ARRESTO(A,D) = 0 se A(D) non termina



Osservazione

L'algoritmo ARRESTO non può consistere in un algoritmo che simuli la computazione A(D)

se A non si arresta su D, ARRESTO non sarebbe in grado di rispondere NO (0) in tempo finito.

DIMOSTRAZIONE

In particolare possiamo scegliere D = A, cioè considerare la computazione A(A)

ARRESTO(A,A) = 1

$\Leftrightarrow$

A(A) termina

DIMOSTRAZIONE

Se esistesse l'algoritmo ARRESTO, esisterebbe anche il seguente algoritmo:

```
PARADOSSO(A)
    while (ARRESTO(A,A)) {
                ;
    }
```

DIMOSTRAZIONE

L'ispezione dell'algoritmo PARADOSSO mostra che:

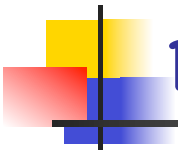
PARADOSSO(A) termina

$\Longleftrightarrow$

x = ARRESTO(A,A) = 0

$\Longleftrightarrow$

A(A) non termina



DIMOSTRAZIONE

Cosa succede calcolando PARADOSSO(PARADOSSO)?

PARADOSSO(PARADOSSO) **termina**

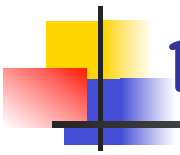
$\Longleftrightarrow$

x = ARRESTO(PARADOSSO, PARADOSSO) = 0

$\Longleftrightarrow$

PARADOSSO(PARADOSSO) **non termina**

contraddizione!



DIMOSTRAZIONE

L'unico modo di risolvere la contraddizione è che l'algoritmo PARADOSSO non possa esistere

Dunque non può esistere nemmeno l'algoritmo ARRESTO

In conclusione, *il problema dell'arresto non è decidibile!*

Osservazione

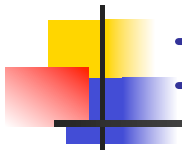
L'algoritmo ARRESTO costituirebbe uno strumento estremamente potente:

permetterebbe infatti di dimostrare congetture ancora aperte sugli interi (esempio: la congettura di Goldbach)

Problemi indecidibili

- Altri problemi lo sono:
  - Ad esempio, è indecidibile stabilire l'equivalenza tra due programmi (se per ogni possibile input, producono lo stesso output)
- "Lezione di Turing":

  non esistono algoritmi che decidono il comportamento di altri algoritmi esaminandoli dall'esterno, cioè senza passare dalla loro simulazione.



Il decimo problema di Hilbert

- *Esistono risultati di non calcolabilità relativi ad altre aree della matematica, tra cui la teoria dei numeri e l'algebra*
- *Tra questi, occupa un posto di rilievo il ben noto decimo problema di Hilbert*

Equazioni diofantee

Un'**equazione diofantea** è un'equazione della forma

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

dove p è un polinomio a coefficienti interi.

Il decimo problema di Hilbert

Data un'arbitraria equazione diofantea, di grado arbitrario e con un numero arbitrario di incognite

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

stabilire se p ammette soluzioni intere.

Teorema

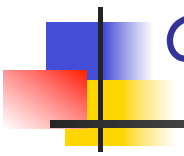
Il decimo problema di Hilbert non è calcolabile.

Il decimo problema di Hilbert

La questione circa la calcolabilità di questo problema è rimasta aperta per moltissimi anni,

ha attratto l'attenzione di illustri matematici,

ed è stata risolta nel 1970 da un matematico russo allora poco più che ventenne, Yuri Matiyasevich.



MODELLI DI CALCOLO E CALCOLABILITÀ

Modelli di calcolo

La teoria della calcolabilità dipende dal modello di calcolo?

oppure ...

la decidibilità è una proprietà del problema?

La tesi di Church-Turing

Tutti i (ragionevoli) modelli di calcolo

- *risolvono esattamente la stessa classe di problemi*
- dunque si equivalgono nella possibilità di risolvere problemi, pur operando con diversa efficienza

La tesi di Church-Turing

- **La decidibilità è una proprietà del problema**
- Incrementi qualitativi alla struttura di una macchina, o alle istruzioni di un linguaggio di programmazione, servono ***solo*** a
  - abbassare il tempo di esecuzione
  - rendere più agevole la programmazione

La tesi di Church-Turing

La tesi di Church-Turing non è dimostrabile.

Può essere solo accettata o rifiutata:

- *non si può escludere a priori la possibilità che un giorno venga individuato uno strumento in grado di calcolare una funzione ritenuta al momento non calcolabile*