

Figura 6.20 Esempio di albero 2-3. I nodi interni con due figli mantengono il massimo del sottoalbero sinistro (S); i nodi interni con tre figli mantengono il massimo del sottoalbero sinistro e di quello centrale (S ed M).

6.4 Alberi 2-3

Nei Paragrafi 6.2 e 6.3 abbiamo visto come usare rotazioni per implementare le operazioni su dizionari in tempo logaritmico (nel caso peggiore o ammortizzato). In questo paragrafo studieremo una tecnica alternativa alle rotazioni, basata sull'idea di permettere una maggiore flessibilità nel grado dei nodi. Se il grado non è vincolato ad essere 2, il bilanciamento può infatti essere mantenuto tramite opportune separazioni (*split*) e fusioni (*fuse*) di nodi.

Definizione 6.6 (Albero 2-3) *Un albero 2-3 è un albero che in cui ogni nodo interno ha 2 o 3 figli e tutti i cammini radice-foglia hanno la stessa lunghezza.*

Dimostriamo innanzitutto una limitazione sull'altezza degli alberi 2-3.

Lemma 6.5 *Sia T un albero 2-3 con n nodi, f foglie ed altezza h . Le seguenti disuguaglianze sono soddisfatte da n , f e h : $2^{h+1} - 1 \leq n \leq (3^{h+1} - 1)/2$ e $2^h \leq f \leq 3^h$.*

Dimostrazione. Mostriamo la limitazioni contemporaneamente usando induzione su h . Se $h = 0$, l'albero consiste di un singolo nodo, che è anche foglia, e le disuguaglianze sono banalmente verificate. Supponiamo ora che l'ipotesi induttiva sia verificata sino ad altezza h e consideriamo un albero 2-3 T di altezza $h+1$. Sia T' ottenuto da T eliminando l'ultimo livello e siano n' e f' il numero di nodi e di foglie di T' , rispettivamente. Per ipotesi induttiva, $2^{h+1} - 1 \leq n' \leq (3^{h+1} - 1)/2$ e $2^h \leq f' \leq 3^h$. Poiché ogni foglia di T' ha almeno due ad al più tre figli in T , avremo $2 \cdot 2^h \leq f \leq 3 \cdot 3^h$, ovvero $2^{h+1} \leq f \leq 3^{h+1}$. Poiché $n = n' + f$, è facile completare la dimostrazione sfruttando l'ipotesi induttiva su n' . □

Usando la limitazione sul numero di nodi dimostrata nel Lemma 6.5, e passando al logaritmo, otteniamo che l'altezza di un albero 2-3 è $\Theta(\log n)$.

Le chiavi e gli elementi del dizionario sono assegnati alle foglie dell'albero, in modo che le chiavi appaiano in ordine crescente da sinistra verso destra. Ogni nodo interno v mantiene invece due informazioni supplementari: $S[v]$ e $M[v]$. $S[v]$ è la massima chiave nel sottoalbero radicato nel figlio sinistro di v , e $M[v]$ è

```

algoritmo search(radice  $r$  di un albero 2-3, chiave  $x$ )  $\rightarrow$  elem
1.   if ( $r$  è una foglia) then
2.     if ( $x = \text{chiave}(r)$ ) then return  $\text{elem}(r)$ 
3.     else return null
4.    $v_i \leftarrow i$ -esimo figlio di  $r$ 
5.   if ( $x \leq S[r]$ ) then return search( $v_1, x$ )
6.   else if ( $r$  ha due figli oppure  $x \leq M[r]$ ) then return search( $v_2, x$ )
7.   else return search( $v_3, x$ )

```

Figura 6.21 Implementazione dell'operazione `search` in un albero 2-3.

la massima chiave nel sottoalbero radicato nel figlio centrale di v . Un esempio è mostrato in Figura 6.20. Grazie alle informazioni S ed M , una ricerca può essere implementata in una maniera simile agli alberi binari di ricerca classici.

```

search(chiave  $k$ )  $\rightarrow$  elem

```

Confrontiamo la chiave cercata k sia con $S[v]$ che con $M[v]$. Se $k \leq S[v]$ proseguiamo nel sottoalbero sinistro; se $S[v] < k \leq M[v]$ proseguiamo nel sottoalbero centrale; altrimenti proseguiamo nel sottoalbero destro. Lo pseudocodice è mostrato in Figura 6.21. Il tempo richiesto da `search` è proporzionale all'altezza dell'albero, che è $\Theta(\log n)$ per il Lemma 6.5.

6.4.1 Fusioni e separazioni di nodi

In questo paragrafo mostreremo come sfruttare le possibili variazioni di grado per aggiornare un albero 2-3 a fronte di inserimenti e cancellazioni di elementi.

```

insert(elem  $e$ , chiave  $k$ )

```

Creiamo un nuovo nodo u con elemento e e chiave k . Localizziamo la corretta posizione per l'inserimento di u ricercando la chiave k nell'albero. Identifichiamo così un nodo v , sul penultimo livello, che dovrebbe diventare genitore di u . Abbiamo ora due casi:

- v ha due figli: possiamo aggiungere u come nuovo figlio di v , inserendolo opportunamente come figlio sinistro, centrale, o destro in modo da mantenere l'ordinamento crescente delle chiavi. Questo può comportare dover aggiornare i valori S ed M del nodo v e dei suoi antenati.
- v ha tre figli: non potendo aggiungere un ulteriore figlio a v , separiamo il nodo in due, con un'operazione chiamata `split`. Creiamo un nuovo nodo w e calcoliamo la posizione corretta che u dovrebbe avere rispetto ai tre figli di v . Rendiamo le due foglie con chiavi minime figlie di w e le rimanenti due figlie di v . Attacciamo poi w come figlio del padre di v immediatamente precedente a v . Se il padre di w aveva due figli, possiamo fermarci. Altrimenti, dobbiamo

Figura 6

esegui
Nel ca
aggiu
lungo

Un esen
procedu
ra 6.23 (
nodo: a;
ciascun
peggiore

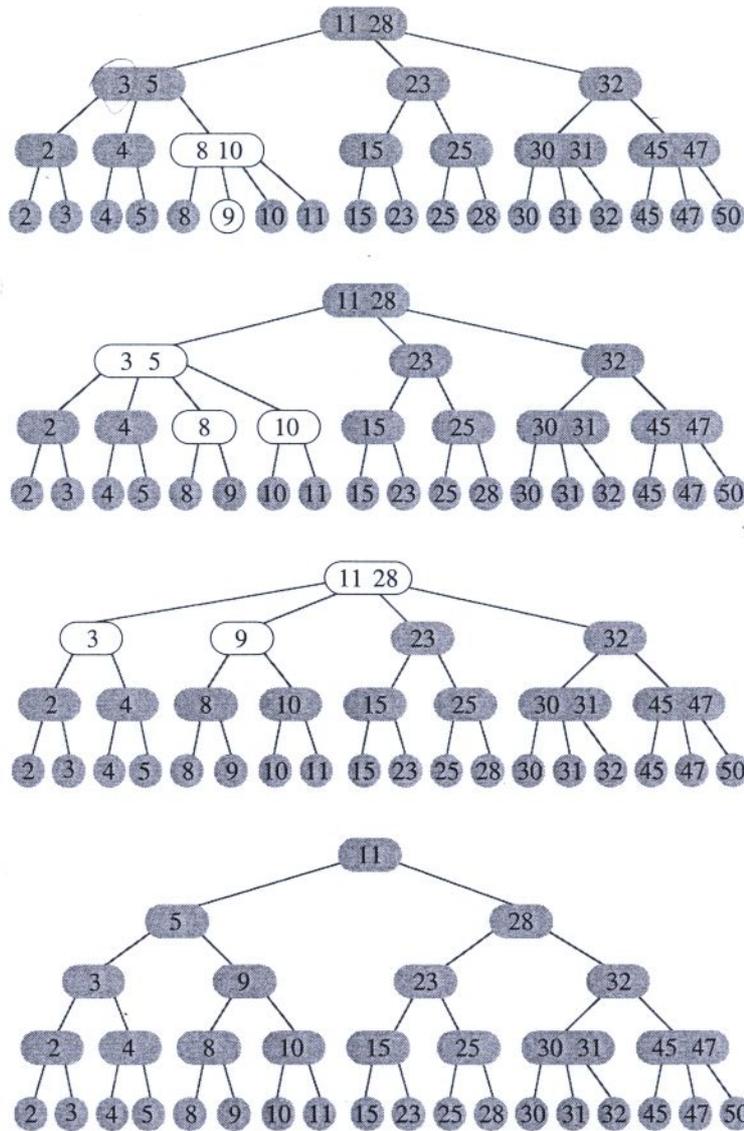


Figura 6.22 Inserimento del nodo con chiave 9 in un albero 2-3.

eseguire un nuovo *split* sul padre di v , procedendo nell'albero verso l'alto. Nel caso peggiore, quando tutti i nodi lungo il cammino avevano già tre figli, aggiungeremo all'albero una nuova radice. I valori S e M dei nodi incontrati lungo la risalita vanno anch'essi aggiornati opportunamente.

Un esempio di inserimento è illustrato in Figura 6.22. Lo pseudocodice della procedura *split*, richiamata su un nodo v con 4 figli, è inoltre mostrato in Figura 6.23 (lo pseudocodice non mostra come aggiornare i campi S ed M di ciascun nodo: aggiungere le opportune istruzioni può essere un utile esercizio). Poiché ciascuno *split* richiede tempo costante e l'altezza dell'albero è $\Theta(\log n)$, nel caso peggiore l'inserimento richiede tempo $O(\log n)$.

esempio è
può essere

'[v] prose-
ottoalbero
lice è mo-
all'altezza

grado per
enti.

la corretta
entifichia-
tore di u .

inserendolo
mantenere
aggiornare

amo il no-
nodo w e
figli di v .
due figlie
precedente
dobbiamo

algoritmo `split(nodo v)`

1. crea un nuovo nodo w
2. sia v_i l' i -esimo figlio di v in T , $1 \leq i \leq 4$
3. rendi v_1 e v_2 figli sinistro e destro di w
4. **if** ($parent[v] = \text{null}$) **then**
5. crea un nuovo nodo r
6. rendi w e v figli sinistro e destro di r
7. **else**
8. aggiungi w come figlio di $parent[v]$ immediatamente precedente a v
9. **if** ($parent[v]$ ha quattro figli) **then** `split(parent[v])`

Figura 6.23 Implementazione della procedura ausiliaria `split` usata per implementare l'inserimento in un albero 2-3.

`delete(elem e)`

L'operazione di cancellazione è simmetrica a quella di inserimento. Sia v il nodo contenente l'elemento e da eliminare. Abbiamo tre casi:

- v è la radice: basta rimuoverla ottenendo un albero vuoto.
- Il padre di v ha tre figli: è possibile rimuovere v , aggiornando eventualmente i campi S e M di v e dei suoi antenati (vedi Figura 6.24a).
- Il padre di v ha due figli: se il padre di v è la radice, basta eliminare v e suo padre, lasciando l'altro figlio come radice. Altrimenti, eseguiamo una operazione simmetrica allo `split`, che chiameremo `fuse`. Sia w il padre di v ; assumiamo che w abbia un fratello l alla sua sinistra (nessun nodo può infatti essere figlio unico, e il caso in cui w abbia un unico fratello a destra viene trattato in modo

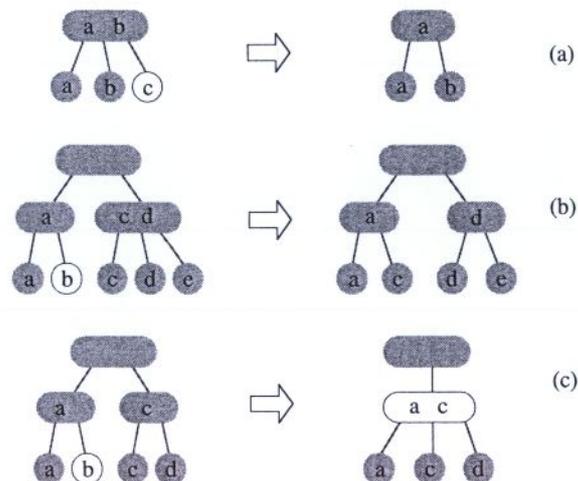


Figura 6.24 Cancellazione da un albero 2-3: vari casi.

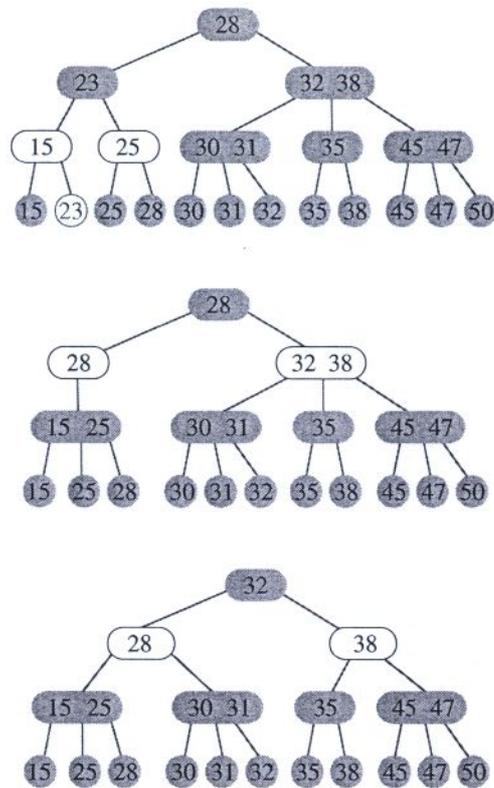


Figura 6.25 Cancellazione del nodo con chiave 23 da un albero 2-3.

simile). Se l ha tre figli, spostiamo il figlio destro di l come figlio sinistro di w e cancelliamo v (vedi Figura 6.24b). Altrimenti, dopo aver rimosso v , attacchiamo l'unico figlio rimanente di w come figlio destro di l e richiamiamo ricorsivamente la procedura per cancellare w (vedi Figura 6.24c).

Un esempio di cancellazione è mostrato in Figura 6.25. Anche in questo caso, poiché ciascuna fase richiede tempo costante e l'altezza dell'albero è $\Theta(\log n)$, nel caso peggiore la cancellazione richiede tempo $O(\log n)$.

Riassumiamo i dettagli sull'implementazione della classe `Albero23` in Figura 6.26 e le prestazioni degli alberi 2-3 nel seguente teorema.

Teorema 6.5 *Un albero 2-3 con n nodi supporta operazioni `search`, `insert` e `delete` in tempo $O(\log n)$ nel caso peggiore.*

6.5 B-alberi

In questo paragrafo affronteremo il problema di come realizzare un dizionario in memoria secondaria. Come abbiamo visto nel Paragrafo 2.8 del Capitolo 2, la

classe Albero23 **implementa** Dizionario:

dati: $S(n) = O(n)$
 un albero 2-3 T con n nodi: le foglie mantengono le chiavi e gli elementi del dizionario, mentre i nodi interni mantengono le informazioni supplementari S e M .

operazioni:

$\text{search}(\text{chiave } k) \rightarrow \text{elem}$ $T(n) = O(\log n)$
 traccia un cammino nell'albero usando la proprietà di ricerca e le informazioni S e M per decidere se proseguire nel sottoalbero sinistro, centrale (se esiste) o destro.

$\text{insert}(\text{elem } e, \text{chiave } k)$ $T(n) = O(\log n)$
 crea un nuovo nodo v con elemento e e chiave k , e lo aggiunge all'albero come foglia mantenendo la proprietà di ricerca. Se il padre di v aveva già tre figli, separa il nodo in due tramite uno `split` e propaga le separazioni verso l'alto, fino al primo nodo con due figli o fino alla creazione di una nuova radice.

$\text{delete}(\text{elem } e)$ $T(n) = O(\log n)$
 elimina il nodo v con elemento e . Se il padre w di v aveva solo due figli, uniscilo al fratello tramite un'operazione `fuse` e propaga le fusioni verso l'alto, fino al primo nodo con tre figli o fino alla cancellazione della radice.

Figura 6.26 Dizionario realizzato mediante alberi 2-3.

memoria secondaria è tipicamente molto più grande di quella principale, ma accedervi è molto più costoso in termini di tempo. È quindi importante minimizzare il numero di letture e scritture su memoria esterna (I/O). Per ammortizzare il tempo speso in ogni accesso, i dati sono gestiti in blocchi di dimensione B : per poter sfruttare questo fatto, è importante che un algoritmo o una struttura dati esibisca località nell'accesso ai dati.

Le implementazioni dei dizionari proposte nei paragrafi precedenti non esibiscono buona località: intuitivamente, non offrono nessuna garanzia che i nodi su un certo cammino di ricerca risiedano nello stesso blocco, e quindi si potrebbero avere $\Theta(\log n)$ I/O nel caso peggiore. Come vedremo, è possibile fare molto meglio. L'idea è di aumentare l'informazione a carico di ciascun nodo ed il grado del nodo rendendoli proporzionali a B . In questo modo, potremo usare tutta l'informazione contenuta in ogni blocco che porteremo in memoria principale, e, poiché diminuiremo considerevolmente l'altezza dell'albero, avremo un numero minore di accessi a memoria secondaria. I B-alberi che presentiamo in questo paragrafo sono dovuti a Bayer e McCreight [4] e sono un'estensione naturale degli alberi 2-3 che abbiamo descritto nel Paragrafo 6.4.