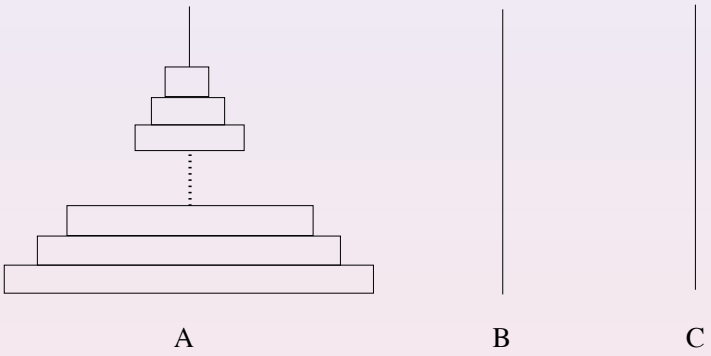
Programmazione ricorsiva: cenni

- In quasi tutti i linguaggi di programmazione evoluti è ammessa la possibilità di definire funzioni/procedure ricorsive: durante l'esecuzione di una funzione F è possibile chiamare la funzione F stessa.
- Ciò può avvenire
  - direttamente: il corpo di F contiene una chiamata a F stessa.
  - indirettamente: F contiene una chiamata a G che a sua volta contiene una chiamata a F.
- Questo può sembrare strano: se pensiamo che una funzione è destinata a risolvere un sottoproblema $\mathcal{P}$, una definizione ricorsiva sembra indicare che per risolvere $\mathcal{P}$ dobbiamo . . . saper risolvere $\mathcal{P}$!

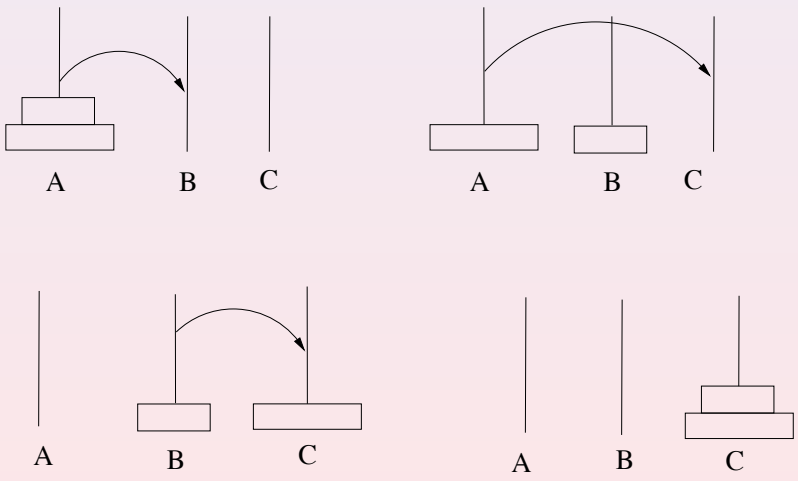
- In realtà, la programmazione ricorsiva si basa sull'osservazione che per molti problemi la soluzione per un caso generico può essere ricavata sulla base della soluzione di un altro caso, generalmente più semplice, dello stesso problema.
- La programmazione ricorsiva trova radici teoriche nel principio di induzione ben fondata che può essere visto come una generalizzazione del principio di induzione sui naturali
- La soluzione di un problema viene individuata supponendo di saperlo risolvere su casi più semplici.
- Bisogna poi essere in grado di risolvere direttamente il problema sui casi più semplici di qualunque altro.

Esempio: Torre di Hanoi (leggenda Vietnamita).



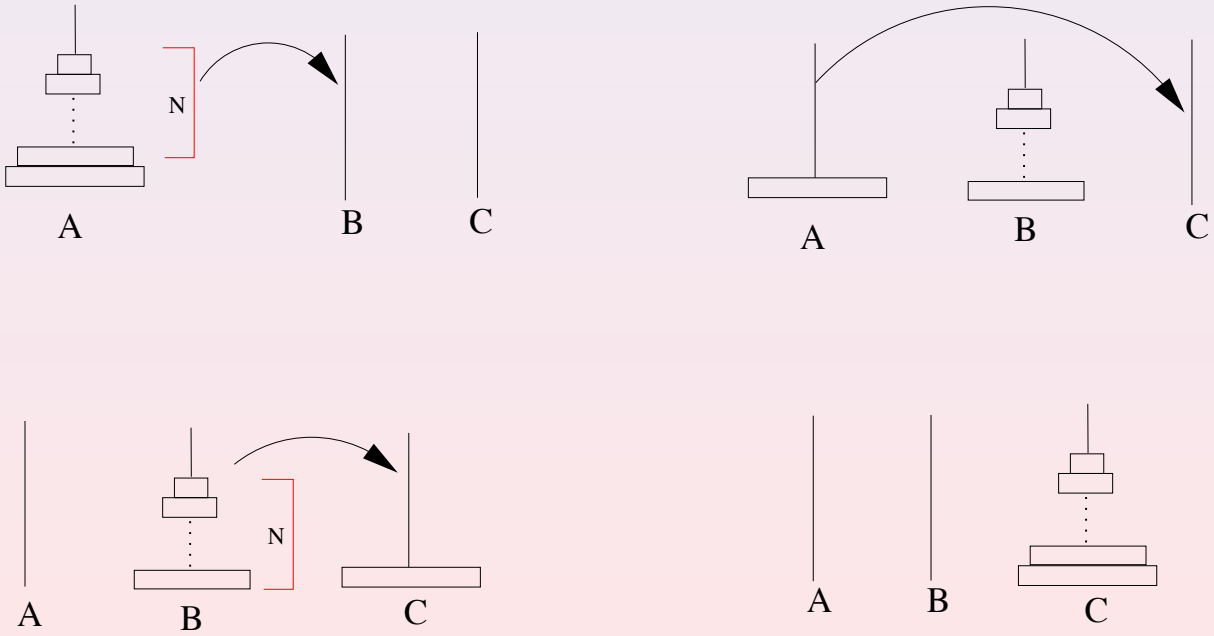
- pila di dischi di dimensione decrescente su un perno A
- vogliamo spostarla sul perno C, usando un perno di appoggio B
- vincoli:
  - possiamo spostare un solo disco alla volta
  - un disco più grande non può mai stare su un disco più piccolo
- secondo la leggenda: i monaci stanno spostando 64 dischi: quando avranno finito, ci sarà la fine del mondo

- Come individuare una soluzione per un numero N di dischi arbitrario?
  - per N=1 la soluzione è immediata: spostiamo l'unico disco da A a C
  - se sappiamo risolvere il problema per N=1 lo sappiamo risolvere anche per N=2: come?



- Notiamo l'utilizzo del perno ausiliario B

- Possiamo generalizzare il ragionamento? Se sappiamo risolvere il problema per N dischi, possiamo individuare una soluzione per lo stesso problema ma con N+1 dischi?



- Formalizziamo il ragionamento
- Indichiamo con hanoi(N, P1, P2, P3) il problema: "spostare N dischi dal perno P1 al perno P2 utilizzando P3 come perno d'appoggio".

```
hanoi(N, P1, P2, P3)
     if (N=1)
         sposta  da P1 a P2;
     else
       {
         hanoi(N-1, P1, P3, P2);
         sposta da P1 a P2;
         hanoi(N-1, P3, P2, P1);
       }
```

Esempio: Soluzione di hanoi(3,A,C,B)

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{hanoi(1,A,C,B)} = \text{sposta(A,C)} \\
\text{hanoi(2,A,B,C)} = & \text{sposta(A,B)} \\
 & \text{hanoi(1,C,B,A)} = \text{sposta(C,B)} \\
\text{hanoi(3,A,C,B)} = & \text{sposta(A, C)} \\
 & \text{hanoi(1,B,A,C)} = \text{sposta(B,A)} \\
\text{hanoi(2,B,C,A)} = & \text{sposta(B,C)} \\
 & \text{hanoi(1,A,C,B)} = \text{sposta(A,C)}
\end{array}
$$

- Le funzioni ricorsive sono convenienti per implementare funzioni matematiche definite in modo induttivo.
  Esempio: Definizione induttiva di somma tra due interi non negativi:

$$
somma(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y{=}0 \\ 1 + (somma(x, y-1)) & \text{se } y > 0 \end{cases}
$$

  - La somma di x con 0 viene definita in modo immediato;
  - la somma di x con il successore di y viene definita come il successore della somma tra x e y.
- **Esempio:** somma di 3 e 2:

$$
\begin{array}{rl}
somma(3,2) = & 1 + (\underline{somma(3,1)}) = \\
 & 1 + (1 + (\underline{somma(3,0)})) = \\
 & 1 + (1 + (3)) = \\
 & 1 + 4 = \\
 & 5
\end{array}
$$

Esempio: Funzione fattoriale.

- definizione iterativa: $fatt(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- definizione induttiva:

$$fatt(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \quad \text{(caso base)} \\ n \cdot fatt(n-1) & \text{se } n > 0 \quad \text{(caso induttivo)} \end{cases}$$

- È essenziale il fatto che, applicando ripetutamente il caso induttivo, ci riconduciamo prima o poi al caso base.

$$\begin{aligned} fatt(3) = \quad & 3 \cdot \underline{fatt(2)} = \\ & 3 \cdot (2 \cdot \underline{fatt(1)}) = \\ & 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot \underline{fatt(0)})) = \\ & 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) = \\ & 3 \cdot (2 \cdot 1) = \\ & 3 \cdot 2 = \\ & 6 \end{aligned}$$

Il codice delle due diverse versioni

- definizione iterativa:

```
int fatt(int n) {
    int i,ris;

    ris=1;
    for (i=1;i<=n;i++)
      ris=ris*i;
    return ris;
}
```

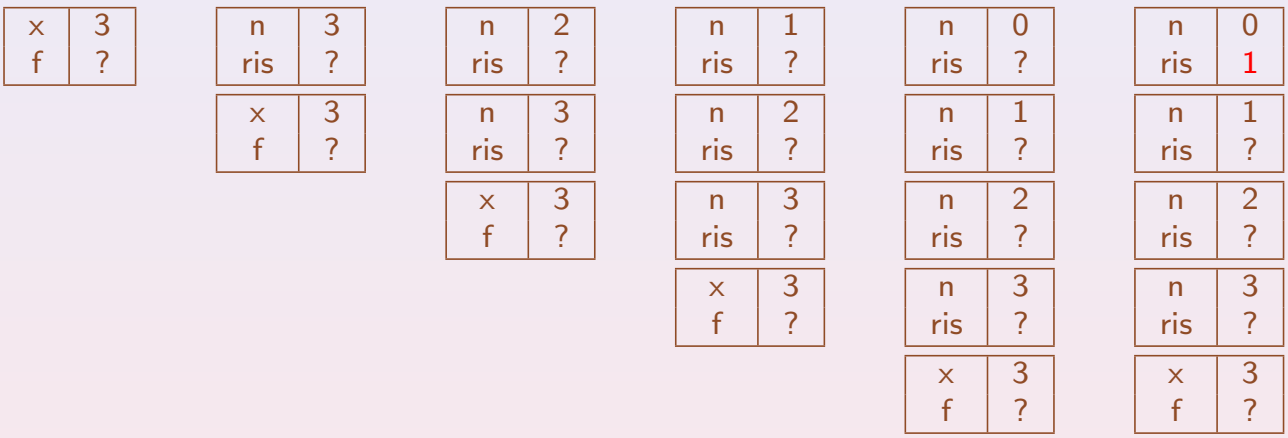
- definizione ricorsiva:

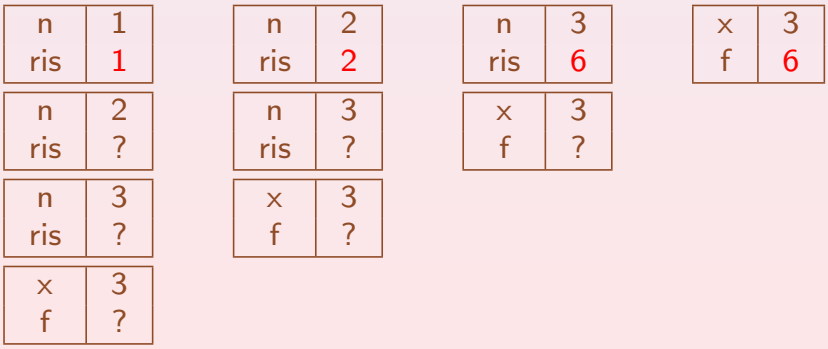
```
int fattric(int n) {
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return n * fattric(n-1);
 }
```

Esempio: Programma che usa una funzione ricorsiva.

```
#include <stdio.h>

int fattric (int);

main()
{
int x, f;
scanf("%d", &x);
f = fattric(x);
printf("Fattoriale di %d:  %d\n", x, f);
}

int fattric(int n) {
  int ris;
  if (n == 0)
    ris = 1;
  else
    ris = n * fattric(n-1);
  return ris;
}
```


Evoluzione della pila (supponendo x=3).





Esempio: Leggere una sequenza di caratteri terminata da '\n' e stamparla invertita. Ad esempio: casa $\Longrightarrow$ asac

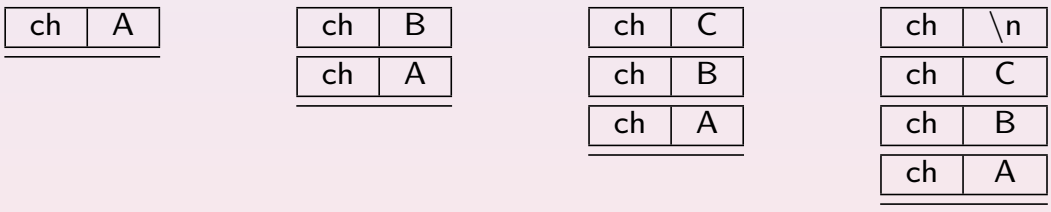
- Problema: prima di poter iniziare a stampare dobbiamo aver letto e memorizzato tutta la sequenza:
  1. usando una struttura dati opportuna ma dinamica (liste, le vedremo più avanti)
  2. usando un procedimento ricorsivo.
     - leggiamo un carattere della sequenza, c1, leggiamo e stampiamo ricorsivamente il resto della sequenza c2...cn e infine stampiamo c1;
     - il caso base è rappresentato dalla lettura del carattere di fine sequenza.

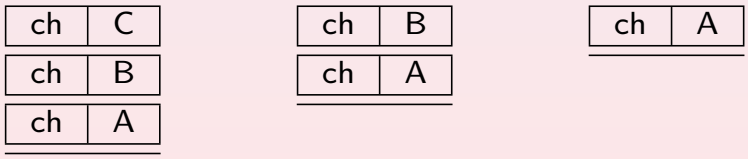
```
void invertInputRic()
 {  char ch;

  ch = getchar();
  if (ch != '\n')
    {
    invertInputRic();
    putchar(ch);
    }
  else
    printf("Sequenza invertita: ");
}
```



```
 main()
{
  printf("Immetti una sequenza di caratteri\n");
  invertInputRic();
  printf("\n");
}
```

Vediamo come evolve la pila per l'input ABC\n





L'output prodotto è il seguente

```
Sequenza invertita:  CBA
```

Ricorsione multipla

- Si ha ricorsione multipla quando un'attivazione di una funzione può causare più di una attivazione ricorsiva della stessa funzione (es. torre di Hanoi)

  Esempio: Definizione induttiva dei numeri di Fibonacci.

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n) &= F(n-2) + F(n-1) \qquad \text{se } n > 1 \end{aligned}$$

- $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, ... è detta sequenza dei numeri di Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...


```
 #include <stdio.h>

int fibonacci (int);

main() {
  int n;

  printf("Inserire un intero >= 0: ");
  scanf("%d", &n);
  printf("Numero %d di Fibonacci: %d\n", n, fibonacci(n));
}

 int fibonacci(int i)
  {
  int ris;
  if (i == 0)
    ris = 0;
  else if (i == 1)
    ris = ;
  else
    ris =  fibonacci(i-1) + fibonacci(i-2);
  return ris;
  }
```

Esempi di funzioni ricorsive

- Tradurre in C la definizione induttiva già vista:

$$somma(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y = 0 \\ 1 + (somma(x, y-1)) & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

```
int somma (int x, int y)
{
  int ris;
  if (y==0)
     ris = x;
  else
     ris = 1 + somma(x, y-1);
  return ris;
}
```


- Calcolo ricorsivo di x^y (si assume $y \geq 0$)

$$x^y = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ x \cdot x^{y-1} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

```
int exp (int x, int y)
{
  int ris;
  if (y==0)
     ris = 1;
  else
     ris = x * exp(x, y-1);
  return ris;
}
```

- Calcolare ricorsivamente la somma degli elementi nella porzione di un array v compresa tra gli indici from e to.
- Esprimiamo formalmente quanto richiesto:

$$sumVet(v, from, to) = \sum_{i=from}^{to} v[i]$$

- È evidente che:

$$\sum_{i=from}^{to} v[i] = \begin{cases} 0 & \text{se } from > to \\ v[from] + \sum_{i=from+1}^{to} v[i] & \text{se } from \leq to \end{cases}$$

- La traduzione in C è immediata.


```
int sumVet(int *v, int from, int to)
{
  if (from > to)
    return 0;
  else
    return v[from] + sumvet(v,from+1,to);
}
```

```
int sumVet(int *v, int from, int to)
{
  int somma;
  if (from > to)
    somma = 0;
  else
    somma = v[from] + sumvet(v,from+1,to);
  return somma;
}
```

- Calcolare ricorsivamente il numero di occorrenze dell'elemento x nella porzione di un array v compresa tra gli indici from e to.

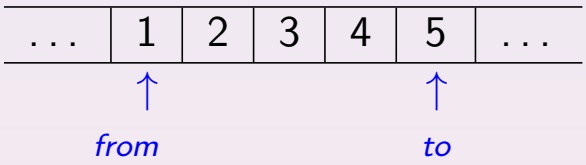
$$f(v, x, from, to) = \#\{i \in [from, to] \mid v[i] = x\}$$

- Anche in questo caso ragioniamo induttivamente:

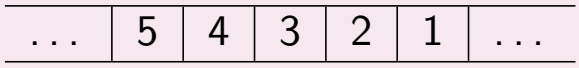
$$f(v, x, from, to) = \begin{cases} 0 & \text{se } from > to \\ f(v, x, from + 1, to) & \text{se } from \leq to \wedge v[from] \neq x \\ 1 + f(v, x, from + 1, to) & \text{se } from \leq to \wedge v[from] = x \end{cases}$$


```
int occorrenze (int *v, int x, int from, int to)
{
  int occ;

  if (from > to)
    occ= 0;
  else
    if (v[from]!=x)
        occ = occorrenze(v,x,from+1,to);
    else
        occ = 1+occorrenze(v,x,from+1,to);
}
```

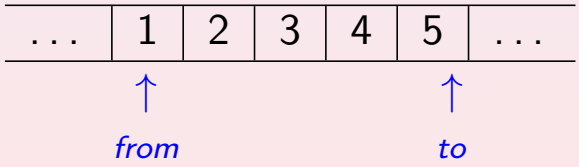
- Scrivere una procedura ricorsiva che inverte la porzione di un array individuata dagli indici from e to.



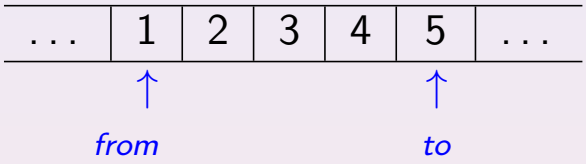
- Vogliamo ottenere:



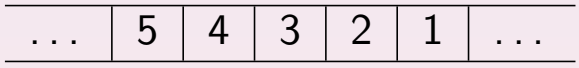
- Induttivamente:



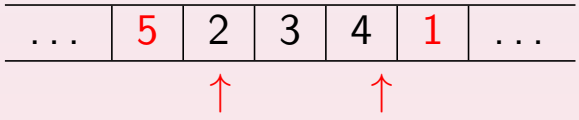
- Scrivere una procedura ricorsiva che inverte la porzione di un array individuata dagli indici from e to.



- Vogliamo ottenere:



- Induttivamente:



- Questa situazione corrisponde alla chiamata ricorsiva su una porzione più piccola del vettore

```
void swap(int *v, int i, int j)
{
    int temp;
    temp = v[i];
    v[i] = v[j];
    v[j] = temp;
}

void invertiric (int *v, int from, int to)
{
  if (from < to)
    {
        swap(v, from, to);
        invertiric(v, from+1, to-1);
    }
}
```

Si noti che la procedura non fa niente se la porzione individuata dal secondo e terzo parametro è vuota (from>to) o contiene un solo elemento (from=to)