

Rappresentazione binaria

- ▶ Per informazione intendiamo tutto quello che viene manipolato da un calcolatore:
 - ▶ numeri (naturali, interi, reali, ...)
 - ▶ caratteri
 - ▶ immagini
 - ▶ suoni
 - ▶ programmi
 - ▶ ...
- ▶ La più piccola unità di informazione memorizzabile o elaborabile da un calcolatore, il **bit**, corrisponde allo stato di un dispositivo fisico che viene interpretato come **1** o **0**.
- ▶ In un calcolatore tutte le informazioni sono rappresentate in **forma binaria**, come sequenze di **0** e **1**.
- ▶ Per **motivi tecnologici**: distinguere tra due valori di una grandezza fisica è più semplice che non ad esempio tra dieci valori.

Rappresentazione di numeri naturali

- ▶ Un numero naturale è un oggetto matematico, che può essere **rappresentato** mediante una **sequenza di simboli** di un alfabeto fissato.
- ▶ È importante distinguere tra numero e sua rappresentazione: il **numerales** "234" è la rappresentazione del **numero** 234.
- ▶ Si distinguono **2 tipi di rappresentazione**:
 - additiva**: ad es. le cifre romane
 - posizionale**: una cifra contribuisce con un valore diverso al numero a seconda della posizione in cui si trova
- ▶ Noi consideriamo solo la rappresentazione posizionale.

Rappresentazione posizionale

- ▶ Un numero è rappresentato da una **sequenza finita di cifre** di un certo **alfabeto**:

$$c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_1c_0 = N_b$$

c_0 viene detta cifra **meno significativa**

c_{n-1} viene detta cifra **più significativa**

- ▶ Il numero b di cifre diverse (dimensione dell'alfabeto) è detto **base** del sistema di numerazione.
- ▶ Ad ogni cifra è associato un valore compreso tra 0 e $b - 1$.

| Base | Alfabeto | Sistema |
|------|----------------------|-------------|
| 2 | 0, 1 | binario |
| 8 | 0, ..., 7 | ottale |
| 10 | 0, ..., 9 | decimale |
| 16 | 0, ..., 9, A, ..., F | esadecimale |

- Il significato di una sequenza di cifre (il numero N che essa rappresenta) dipende dalla base b :

$$c_{n-1} \cdot b^{n-1} + c_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i = N$$

Esempio: Il numerale 101 rappresenta numeri diversi a seconda del sistema usato:

| Sistema | Base b | 101_b | Valore ₁₀ |
|-------------|----------|--------------|----------------------|
| decimale | 10 | $(101)_{10}$ | 101 |
| binario | 2 | $(101)_2$ | 5 |
| ottale | 8 | $(101)_8$ | 65 |
| esadecimale | 16 | $(101)_{16}$ | 257 |

Intervallo di rappresentazione

- ▶ I numeri rappresentabili in base b con n posizioni (cifre) vanno da 0 a $b^n - 1$.

| | | | | |
|--------------------|------|---|---|---------------------------------|
| 3 cifre in base 10 | : da | 0 | a | $999 = 10^3 - 1$ |
| 8 cifre in base 2 | : da | 0 | a | $255 = 2^8 - 1$ |
| 16 cifre in base 2 | : da | 0 | a | $65\,535 = 2^{16} - 1$ |
| 32 cifre in base 2 | : da | 0 | a | $4\,294\,967\,296 = 2^{32} - 1$ |
| 2 cifre in base 16 | : da | 0 | a | $255 = 16^2 - 1$ |
| 8 cifre in base 16 | : da | 0 | a | $4\,294\,967\,296 = 16^8 - 1$ |

Conversioni di base: da base b a base 10

- ▶ Usando direttamente

$$c_{n-1} \cdot b^{n-1} + c_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i = N$$

esprimendo le cifre e b in base 10 (e facendo i conti in base 10)

Esercizio

(domani) Scrivere l'algoritmo di conversione da base b a base 10.

Conversioni di base: da base 10 a base b

$$\begin{aligned} N &= c_0 + c_1 \cdot b^1 + c_2 \cdot b^2 + \cdots + c_{k-1} \cdot b^{k-1} \\ &= c_0 + b \cdot (c_1 + b \cdot (c_2 + \cdots + b \cdot c_{k-1}) \cdots) \end{aligned}$$

- ▶ Vogliamo determinare le cifre c_0, c_1, \dots, c_{k-1}
- ▶ Consideriamo la divisione di N per b :

$$\begin{aligned} N &= R + b \cdot Q && (0 \leq R < b) \\ &= c_0 + b \cdot (c_1 + b \cdot (\cdots)) \end{aligned}$$

↓

$$R = c_0 \quad \text{ovvero, il resto } R \text{ della divisione di } N \text{ per } b \text{ dà}$$

$$c_0 \quad (\text{cifra meno significativa})$$

$$Q = c_1 + b \cdot (\cdots)$$

- ▶ A partire dal quoziente Q si può iterare il procedimento per ottenere le cifre successive (fino a che Q diventa 0).

Conversione da base 10 a base b

```

i = 0;
while (num != 0) {
    c[i] = num % b;
    num = num / b;
    i = i+1; }

```

N.B. Le cifre vengono determinate dalla meno significativa alla più significativa.

Esempio: $(25)_{10} = (???)_2 = (11001)_2$

| $N : b$ | Q | R | cifra |
|----------|-----|-----|-------|
| $25 : 2$ | 12 | 1 | c_0 |
| $12 : 2$ | 6 | 0 | c_1 |
| $6 : 2$ | 3 | 0 | c_2 |
| $3 : 2$ | 1 | 1 | c_3 |
| $1 : 2$ | 0 | 1 | c_4 |

N.B. servono **5** bit (con cui possiamo rappresentare i numeri da **0** a **31**)

Rappresentazione di numeri interi

- ▶ Dobbiamo rappresentare anche il **segno**: si usa uno dei bit (quello più significativo)

Rappresentazione tramite modulo e segno

- ▶ il bit più significativo rappresenta il segno
 - ▶ le altre $n - 1$ cifre rappresentano il valore assoluto
 - ▶ problemi:
 - ▶ doppia rappresentazione per lo zero ($00 \dots 00$ e $10 \dots 00$)
 - ▶ le operazioni aritmetiche sono complicate (analisi per casi)
- ⇒ invece della rappresentazione tramite modulo e segno si usa una rappresentazione in **complemento alla base**

Rappresentazione in complemento alla base

In quanto segue b indica la base e n indica il numero complessivo di cifre.

- ▶ Con base b e n cifre, abbiamo a disposizione b^n configurazioni distinte.
- ▶ Utilizziamo metà delle configurazioni per rappresentare numeri positivi e l'altra metà per rappresentare numeri negativi.

$$\|X\| = \begin{cases} X & \text{se } X \geq 0 \\ b^n - |X| & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

- ▶ in questo modo si rappresentano gli interi relativi nell'intervallo $[-b^n/2, b^n/2)$
 - ▶ se $X \geq 0$: $\|X\|$ è compresa in $[0, b^n/2)$
 - ▶ se $X < 0$: $\|X\|$ è compresa in $[b^n/2, b^n)$
- ▶ lo 0 ha una sola rappresentazione

Rappresentazione in complemento alla base

| N | $b = 10$ e $n = 1$ | $b = 2$ e $n = 3$ |
|-----|--------------------|-------------------|
| -5 | 5 | |
| -4 | 6 | 100 |
| -3 | 7 | 101 |
| -2 | 8 | 110 |
| -1 | 9 | 111 |
| 0 | 0 | 000 |
| 1 | 1 | 001 |
| 2 | 2 | 010 |
| 3 | 3 | 011 |
| 4 | 4 | |

- ▶ se $b = 2 \implies$ rappresentazione in **complemento a 2**
 - ▶ rappresentazione degli interi relativi nell'intervallo $[-2^{n-1}, 2^{n-1})$
 - ▶ positivi: la cifra più significativa è **0** (rappresentati nella parte inferiore dell'intervallo)
 - ▶ negativi: la cifra più significativa è **1** (rappresentati nella parte superiore dell'intervallo)

Operazione di complementazione

Vogliamo determinare un algoritmo per determinare la rappresentazione in complemento alla base di $-X$, data quella di X . Indipendentemente dal segno di X , abbiamo:

$$\|X\| + \|-X\| = |X| + b^n - |X| = b^n$$

per cui

$$\|-X\| = b^n - \|X\|$$

o equivalentemente

$$\|-X\| = b^n - 1 - \|X\| + 1$$

Operazione di complementazione

- Supponiamo:

$$\|X\| = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i$$

e ricordiamo che la rappresentazione di $b^n - 1$ è

$$\sum_{i=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^i$$

- Otteniamo:

$$\begin{aligned} \|-X\| &= b^n - 1 - \|X\| + 1 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i \right) + 1 \end{aligned}$$

Operazione di complementazione

- Sia ora k la prima posizione significativa di $\|X\|$, ovvero la prima cifra (a partire da destra) diversa da 0. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
 \| -X \| &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i \right) + 1 \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^i \right) - \left(\sum_{i=k}^{n-1} c_i \cdot b^i \right) + 1 \\
 &= \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} ((b-1) - c_i) \cdot b^i \right) + ((b-1) - c_k) \cdot b^k + \\
 &\quad \left(\sum_{i=0}^{k-1} (b-1) \cdot b^i \right) + 1
 \end{aligned}$$

- Osserviamo ora che $\left(\sum_{i=0}^{k-1} (b-1) \cdot b^i \right) + 1 = b^k$.

Operazione di complementazione

- Sia ora k la prima posizione significativa di $\|X\|$, ovvero la prima cifra (a partire da destra) diversa da 0. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
 \| -X \| &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot b^i \right) + 1 \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^i \right) - \left(\sum_{i=k}^{n-1} c_i \cdot b^i \right) + 1 \\
 &= \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} ((b-1) - c_i) \cdot b^i \right) + ((b-1) - c_k) \cdot b^k + b^k
 \end{aligned}$$

Operazione di complementazione

$$\begin{aligned} \|\!-\!X\| &= \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} ((b-1) - c_i) \cdot b^i \right) + ((b-1) - c_k) \cdot b^k + b^k \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} ((b-1) - c_i) \cdot b^i \right) + (b - c_k) \cdot b^k \end{aligned}$$

- ▶ L'ultimo addendo è 0, poichè $c_i = 0$, per ogni $i = 0, \dots, k-1$.
- ▶ Come possiamo leggere quanto ottenuto?

La rappresentazione di $-X$ si ottiene da quella di X :

1. ricopiando gli zeri meno significativi
2. complementando alla base la prima cifra significativa
3. complementando alla base meno uno le rimanenti cifre

Operazione di complementazione

$$\begin{aligned} \|\!-\!X\| &= \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} ((b-1) - c_i) \cdot b^i \right) + ((b-1) - c_k) \cdot b^k + b^k \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} ((b-1) - c_i) \cdot b^i \right) + (b - c_k) \cdot b^k + \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i \cdot b^i \right) \end{aligned}$$

- ▶ L'ultimo addendo è 0, poichè $c_i = 0$, per ogni $i = 0, \dots, k-1$.
- ▶ Come possiamo leggere quanto ottenuto?

La rappresentazione di $-X$ si ottiene da quella di X :

1. ricopiando gli zeri meno significativi
2. complementando alla base la prima cifra significativa
3. complementando alla base meno uno le rimanenti cifre

Operazione di complementazione

Esempio: $b = 3$, $n = 4$, $||X|| = 0210$ (dunque $X = (21)_{10}$)

$$||-X|| = 2020$$

Verifichiamo:

- ▶ $2020 = (60)_{10}$
- ▶ $3^4 - 60 = 81 - 60 = 21 = |-X|$

Nel caso del **complemento a 2** abbiamo più semplicemente:

- ▶ si lasciano inalterate tutte le cifre fino al primo **1** compreso
- ▶ si invertono le rimanenti cifre

Complemento a 2

Esempio: Rappresentazione di -298 in complemento a 2:

- ▶ di quante cifre minimo abbiamo bisogno per rappresentare 298 ?
- ▶ $-2^{10-1} \leq 298 < 2^{10-1}$: 10 cifre
- ▶ $298 = 256 + 32 + 8 + 2$, $||298||$ in base 2 = 100101010
- ▶ $||298||$ in complemento a 2 con 10 cifre = 0100101010
- ▶ $||-298||$ in complemento a 2 con 10 cifre = 1011010110
- ▶ $||298||$ in complemento a 2 con 11 cifre = 00100101010
- ▶ $||-298||$ in complemento a 2 con 11 cifre = 11011010110

Operazioni su interi relativi in complemento a 2

Somma di due numeri

- ▶ si effettua **bit a bit**
- ▶ non è necessario preoccuparsi dei segni
- ▶ il risultato sarà corretto (in complemento a 2 se negativo)
- ▶ può verificarsi **trabocco** (overflow) \implies il risultato non è corretto

Si verifica quando il numero di bit a disposizione non è sufficiente per rappresentare il risultato.

Operazioni su interi relativi in complemento a 2

Esempio: $n = 5$, $\pm 9 \pm 3$, $\pm 9 \pm 8$

intervallo di rappresentazione: da -2^4 a $2^4 - 1$ (da -16 a 15)

| | | | | | | | |
|------|-------|----|-------|----|-------|-----|-------|
| rip. | 00011 | | 11001 | | 00111 | | 11111 |
| +9 | 01001 | +9 | 01001 | -9 | 10111 | -9 | 10111 |
| +3 | 00011 | -3 | 11101 | +3 | 00011 | -3 | 11101 |
| +12 | 01100 | +6 | 00110 | -6 | 11010 | -12 | 10100 |

In questi casi non si ha trabocco.

| | | | |
|-------------|-------|-------------|-------|
| rip. | 01000 | | 10000 |
| +9 | 01001 | -9 | 10111 |
| +8 | 01000 | -8 | 11000 |
| -15 | 10001 | +15 | 01111 |
| (e non +17) | | (e non -17) | |

Si ha **trabocco** quando il riporto sul bit di segno è diverso dall'ultimo riporto.

Operazioni su interi relativi in complemento a 2

Differenza tra due numeri: si somma al primo il complemento del secondo

Esempio: $n = 5$, intervallo di rappresentazione: da -16 a 15

| | | | |
|-------|-------|----------|-------|
| rip. | 11111 | 11001 | |
| +9 | 01001 | +9 01001 | |
| -9 | 10111 | -3 11101 | |
| <hr/> | | <hr/> | |
| 0 | 00000 | +6 | 00110 |

Numeri frazionari

- ▶ Numeri reali compresi tra 0 e 1: si rappresentano comunemente come

$$N = 0.c_{-1}c_{-2} \dots c_{-n}$$

- ▶ Il peso delle cifre dipende, al solito, dalla loro posizione e dalla base prescelta

$$N_b = c_{-1} \cdot b^{-1} + c_{-2} \cdot b^{-2} + \dots + c_{-n} \cdot b^{-n} = \sum_{i=-n}^{-1} c_i \cdot b^i$$

Esempio: Consideriamo $b = 10$ ed il numero 0.587

$$0.587_{10} = 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$$

Numeri frazionari

$$N_b = \sum_{i=-n}^{-1} c_i \cdot b^i \quad (\bullet)$$

- ▶ Nel caso di un numero frazionario in binario, possiamo usare la (\bullet) per convertirlo in base 10

Esempio: Convertiamo in base 10 il numero frazionario binario 0.1011_2

$$0.1011_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = 0.6875_{10}$$

- ▶ La rappresentazione dei numeri frazionari può introdurre **approssimazioni** dovute alla limitatezza delle cifre dopo la virgola.
- ▶ L'approssimazione è comunque inferiore a b^{-n} dove n è il numero di cifre utilizzate.

Conversione di un numero frazionario da base 10 a base 2

- ▶ Il metodo più semplice consiste nell'effettuare una sequenza di moltiplicazioni per 2 prendendo ad ogni passo la parte intera del risultato come cifra binaria della rappresentazione
- ▶ **Esempio:** Convertiamo 0.125 in base 2

$$\begin{array}{rcll} 0.125 \times 2 & = & 0.25 & | 0 \\ 0.25 \times 2 & = & 0.5 & | 0 \\ 0.5 \times 2 & = & 1.0 & | 1 \end{array}$$

- ▶ In questo caso abbiamo una rappresentazione **esatta** su 3 cifre (0.125 = 1/8)

$$0.125_{10} = 0.001_2$$

Conversione di un numero frazionario da base 10 a base 2

- ▶ **Esempio:** Convertiamo 0.587_{10} in base 2

$$\begin{array}{rcll}
 0.587 \times 2 & = & 1.174 & | & 1 \\
 0.174 \times 2 & = & 0.348 & | & 0 \\
 0.348 \times 2 & = & 0.696 & | & 0 \\
 0.696 \times 2 & = & 1.392 & | & 1 \\
 0.392 \times 2 & = & 0.784 & | & 0 \\
 0.784 \times 2 & = & 1.568 & | & 1 \\
 0.568 \times 2 & = & \dots & | &
 \end{array}$$

- ▶ Quindi la rappresentazione di 0.587_{10} in base 2 è:
 - ▶ 0.1001_2 con 4 cifre (approssimazione accurata entro 2^{-4})
 - ▶ 0.100101_2 con 6 cifre (approssimazione accurata entro 2^{-6})

L'aritmetica reale

- ▶ L'insieme dei reali (e dei razionali) è infinito \implies non è possibile rappresentarlo tutto

Rappresentazione in virgola fissa

Si rappresentano separatamente, usando un numero fissato di cifre

- parte intera e,
- parte frazionaria

(si usa una virgola per separare le due parti)

$$N_b = c_{n-1} c_{n-2} \cdots c_1 c_0 , c_{-1} c_{-2} \cdots c_{-m}$$

rappresenta il numero

$$N = c_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + c_0 \cdot b^0 + c_{-1} \cdot b^{-1} + \cdots + c_{-m} \cdot b^{-m}$$

L'aritmetica reale

- ▶ Limitazioni della rappresentazione:
 - ▶ k bit per la parte intera $\implies (-2^k, 2^k)$
 - ▶ m bit per la parte frazionaria \implies precisione $\leq 2^{-m}$

Rappresentazione in virgola mobile (floating point)

Utilizza la notazione **esponenziale**. Si esprime il numero come prodotto di due parti

$$X = m \cdot b^e$$

Esempio:

$$1150 = 1.15 \times 10^3$$

ma anche

$$1150 = 0.115 \times 10^4$$

Rappresentazione in virgola mobile

Rappresentazione in **forma normalizzata** in base b

$$X = m \cdot b^e$$

- ▶ e è la **caratteristica** in base b di X : intero relativo
- ▶ m è la **mantissa** in base b di X : numero frazionario tale che $1/b \leq |m| < 1$
- ▶ **Esempio:**

$$1150 = \underset{\text{mantissa}}{0.115} \times \underset{\text{caratteristica}}{10^4}$$

Rappresentazione in virgola mobile

- ▶ Se la caratteristica è rappresentata dalla sequenza di cifre

$$c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots$$

allora rappresenta il valore

$$c_1 \cdot b^{-1} + c_2 b^{-2} + \dots$$

Esempio: $X = (5)_{10} = (101)_2$ che normalizzato diventa:

$$m = |m| = (0.101 \dots 0000)_2$$

$$e = (11)_2$$

Rappresentazione in virgola mobile

- ▶ Fissati:
 - ▶ k bit per mantissa
 - ▶ h bit per caratteristica
 - ▶ 1 bit per il segno

l'insieme di reali rappresentabili è fissato (e limitato)

$$(0.1) \quad 1/2 \leq |m| \leq \sum_{i=1}^k 2^{-i} \quad (0.11\dots 1)$$

$$|e| \leq 2^{h-1} - 1$$

- ▶ Questo fissa anche massimo e minimo (in valore assoluto) numero rappresentabile.
- ▶ Assunzione realistica: reali rappresentati con 32 bit:
 - ▶ 24 bit per la mantissa
 - ▶ 7 bit per la caratteristica (in complemento)
 - ▶ 1 bit per il segno della mantissa (0 positivo, 1 negativo)

Rappresentazione in virgola mobile

Insieme \mathcal{F} dei numeri rappresentabili in virgola mobile

- ▶ sottoinsieme finito dei numeri razionali rappresentabili
- ▶ simmetrico rispetto allo 0
- ▶ gli elementi **non** sono uniformemente distribuiti sull'asse reale
 - ▶ densi intorno allo 0

$$m_1 = 0.10, m_2 = 0.11, e_1 = -5$$

$$X_1 = 0.10 \times 10^{-5} = 0.0000010$$

$$X_2 = 0.11 \times 10^{-5} = 0.0000011$$

- ▶ radi intorno al massimo rappresentabile

$$m_1 = 0.10, m_2 = 0.11, e_2 = 5$$

$$X_1 = 0.10 \times 10^5 = 10000$$

$$X_2 = 0.11 \times 10^5 = 11000$$

- ▶ molti razionali non appartengono ad \mathcal{F} (ed es. $1/3$, $1/5$, ...)
- ▶ non è chiuso rispetto ad addizioni e moltiplicazioni
- ▶ per rappresentare un reale X si sceglie l'elemento di \mathcal{F} più vicino ad X
- ▶ la funzione che associa ad un reale X l'elemento di \mathcal{F} più vicino ad X è detta **funzione di arrotondamento**

Limitazioni aritmetiche

Dovute al fatto che il numero di bit usati per rappresentare un numero è limitato

- ▶ perdita di precisione
- ▶ **arrotondamento**: mantissa non sufficiente a rappresentare tutte le cifre significative del numero
- ▶ **errore di overflow**: caratteristica non sufficiente (numero troppo grande)
- ▶ **errore di underflow**: numero troppo piccolo viene rappresentato come 0

Formati standard proposti da IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers)

- ▶ **singola precisione**: 32 bit
- ▶ **doppia precisione**: 64 bit
- ▶ **quadrupla precisione**: 128 bit